

Numerical Analysis of Fisher Equation

Saad A. Manna

Ahmed F. Qassim

College of Computer Science and Mathematics

University of Mosul, Iraq

Received on: 08/06/2005

Accepted on: 09/10/2005

ABSTRACT

The Fisher Equation had been solved numerically by using two Methods of Finite Differences Methods. The First is Explicit Scheme Method and the Second is Crank–Nicholson Method. A Comparison had been made between these two methods and we find that the Crank–Nicholson Method converges towards saturation state $u=1$ faster than the Explicit Scheme Method (Table 1). Also the numerical stability for both Methods had been made, the Explicit Scheme Method is conditionally stable and the condition is $k \leq \frac{2h^2}{4D - rh^2}$, while Crank–Nicholson Method has the condition $h^2 \leq \frac{4D}{r}$ for step size (h), but time step (k) is unconditionally stable.

Keywords: Numerical Analysis, numerical stability, Finite Differences Methods, Explicit Scheme Method, Crank–Nicholson Method, Fisher Equation.

التحليل العددي لمعادلة Fisher

أحمد فاروق قاسم

سعد عبد الله مناع

كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل

تاريخ قبول البحث: 2005/10/09

تاريخ استلام البحث: 2005/06/08

الملخص

تم حل معادلة Fisher عددياً وباستخدام طريقتين من طرائق الفروقات المنتهية، هما الطريقة الصريحة (Explicit Scheme)، والثانية طريقة Crank-Nicholson، ومن ثم تمت مقارنة بين الطريقتين إذ تبين أن طريقة Crank-Nicholson هي الأدق والأسرع من الطريقة الصريحة في الوصول إلى حالة الإشباع ($u=1$ (saturation) كما مبين في الجدول (1)، كذلك تم دراسة الاستقرار العددية للطريقتين المستخدمتين في حل معادلة Fisher، وقد تبين أن الطريقة الصريحة مستقرة بصورة مشروطة (Conditionally Stable)، والشرط هو $k \leq \frac{2h^2}{4D - rh^2}$ ، في حين أن طريقة Crank-Nicholson مشروطة فقط من ناحية خطوة الطول (h) حيث أن $h^2 \leq \frac{4D}{r}$ ، أما الخطوة الزمنية (k) فهي غير مشروطة.

الكلمات المفتاحية: التحليل العددي، طرائق الفروقات المنتهية، الطريقة الصريحة، طريقة Crank-Nicholson، الاستقرار العددية، معادلة Fisher.

1. المقدمة

تعتبر المعادلات التفاضلية خير وسيلة لوصف العديد من المسائل الفيزيائية والهندسية والكيميائية وفي الحقول الأخرى، إذ تمتد تطبيقاتها إلى وصف حركة النيوترونات في التفاعلات النووية في المفاعلات وفي علم حركة الارتداد في بلورات السائل النيماتيكى (Nematic) وكذلك وصف معادلات الانتشار (Diffusion Equations) اللاخطية التي تؤدي دورا مهما في الأنظمة الحركية المشتتة ومن الأمثلة على معادلات الانتشار اللاخطية معادلة Fisher. إن معادلات الانتشار هي مسائل قيم ابتدائية (Initial Value Problems) وتكون في حالة معتمدة على الزمن (Time Dependent Equations) والحل لهذا النوع من المسائل يكون في منطقة مفتوحة R تخضع لشروط حدودية، وتنتج هذه المسائل في دراسة موجات الضغط في السوائل وفي انتشار الجهد والإزاحة وانتشار الحرارة وغيرها، وبصورة عامة إن إمكانية الحصول على حلول تحليلية (Analytical Solution) لمسائل الانتشار هي معقدة كثيرا بالرغم من التطور المتزايد في المفاهيم والأساليب الرياضية المتبعة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية اللاخطية لذلك فان الحلول العددية (Numerical Solutions) تعد الأسلوب الأمثل لدراسة خواص هذا النوع من المعادلات [7].

إن معادلة Fisher وضعها العالم فيشر في عام (1937م) اقترحها نموذجا رياضياً لدراسة علم حركة السكان و انتشارها [1].

في عام (2000) درس S.A.Gourley [3] حلول الموجة المنقلة لمعادلة Fisher غير المحلية وهي حالة خاصة من معادلات الانتشار - التفاعل إذ لاحظ حلول الموجة المنقلة التي تربط ما بين حالتين منتزمتين من المسألة، وفي عام (2002) قام kay & Sanjay Puri Jorg Wiese [6] بتطوير توسيعات الاضطراب للحصول على حلول لمسائل القيم الابتدائية لنوعين من معادلات الانتشار - التفاعل (Diffusion Equations)، الأولى معادلة Fisher، والثانية معادلة Ginzburg-Landau المعتمدة على الزمن، وفي عام (2004) درس &vicente fort & mendez [4] دور زمن التأخير في نمذجة مدى التوسع البيولوجي لمعادلة Fisher، لقد اثبت البحث بان زمن التأخير يقلل من السرعة المتنبأ بها للموجة المتقدمة مقارنة مع النموذج الكلاسيكي لمعادلة Fisher أي (معادلة Fisher بدون زمن التأخير).

في هذا البحث ستم دراسة الحل العددي لمعادلة Fisher باستخدام طريقتين من طرائق الفروقات المنتهية (Finite Differences Methods)، الأولى الطريقة الصريحة (Explicit

(Method)، والثانية طريقة Crank-Nicholson ومقارنة الطريقتين وبيان الطريقة المثلى لحل معادلة Fisher، كذلك دراسة الإستقرارية العددية لكلا الطريقتين.

2. النموذج الرياضي Mathematical Model

إن معادلة Fisher غير الخطية لها الصيغة:

$$\dots(1) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + h(u)$$

إذ $h(u) = ru(1-u)$ هي دالة غير خطية تحقق الشروط الآتية:

$$h(u) \in C^1([0,1])$$

$$h(0) = h(1) = 0$$

$$h'(0) = r > 0$$

$$h'(u) < r$$

$$u \in [0,1]$$

إن $u(x,t)$ تمثل كثافة السكان (Population Density) عند الزمن (t) وعند الموقع (x) ، D هي معامل الانتشار (Diffusion Coefficient) وهي موجبة دائماً، r تمثل معدل نمو السكان (Growth Rate) وهي موجبة أيضاً وتزداد إذا وجدت زيادة هائلة في السكان، وهي تبين كيفية حال السكان بعد زمن معين [5].

أما الشروط الحدودية والابتدائية المستخدمة في حل معادلة Fisher في الفترة $x \in [0,1]$ فهي الشروط الحدودية لنيومان (Neumann Boundary Conditions) وهي [2]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots(2)$$

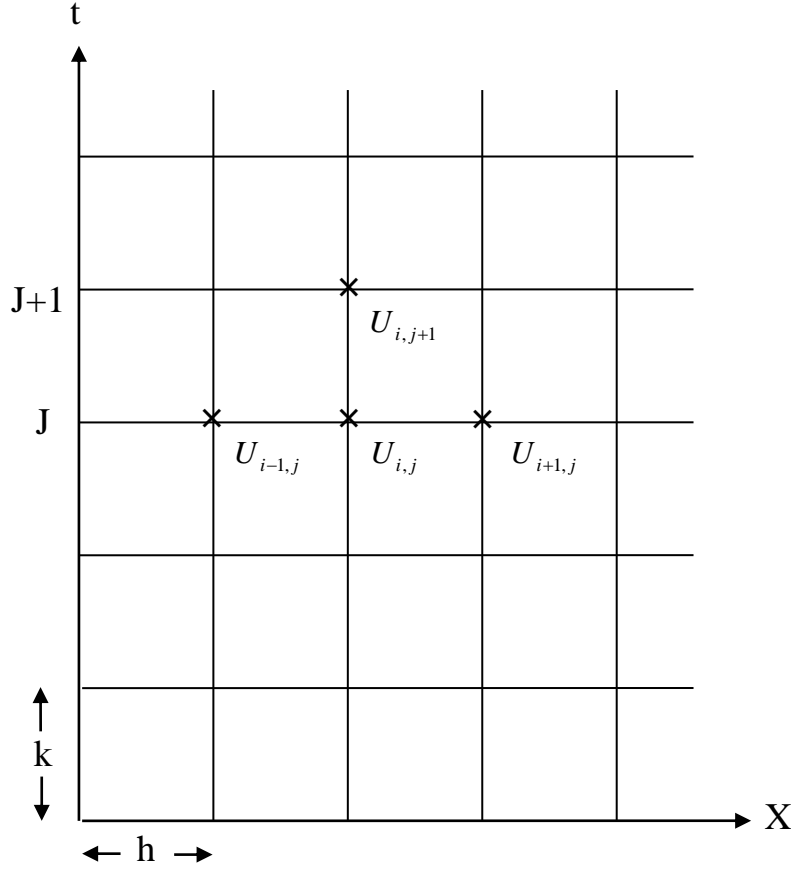
$$u(x,0) = f(x), \quad x \in [0,1]$$

إن من أكثر الطرائق استخداماً لحل المعادلات التفاضلية الجزئية هي طريقة الفروقات المنتهية (Finite Differences) التي تعطي تقريبات جيدة للحل.

Explicit Method

3. الطريقة الصريحة

تعتمد هذه الطريقة على تحديد قيمة الدالة غير المعروفة $U_{i,j+1}$ عند الزمن (t_{j+1}) بدلالة قيم الدوال المعروفة عند نقاط الشبكة $U_{i-1,j}$ و $U_{i,j}$ و $U_{i+1,j}$ عند الزمن (t_j) وكما في الشكل (1):



الشكل (1)

نبدأ أولاً بتقسيم المستطيل $R = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq c\}$ إلى $(m-1)$ و $(n-1)$ من المستطيلات طول ضلع كل منها $(\Delta t = k)$ و $(\Delta x = h)$ وكما في الشكل (1) حيث:

$$x = ih \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$$

$$t = jk \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

إن نقاط تقاطع هذه الخطوط تعرف بنقاط الشبكة (Grid Point) وان الأسلوب العام لحل المعادلات التفاضلية الجزئية بطريقة الفروقات المنتهية هو الحصول على الحل عند نقاط الشبكة، ونقاط الشبكة قد تكون ناتجة عن تقاطع الخطوط المستقيمة في حالة $(h \neq k)$ أو تقاطع الخطوط المربعة $(h = k)$ ، وعليه يكون التقريب العددي للمشتقة الجزئية الأولى والثانية للدالة (u) نسبة إلى (x) و (t) وباستخدام مفكوك تايلر كما يأتي [9]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h} \quad \dots(3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} \quad \dots(4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} \quad \dots(5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2} \quad \dots(6)$$

باستخدام المعادلتين (4) و(5) فإن المعادلة (1) تصبح:

$$\frac{1}{k}(U_{i,j+1} - U_{i,j}) = D \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + rU_{i,j} - r(U_{i,j})^2 \quad \dots(7)$$

من المعادلة (7) يمكن الحصول على ما يأتي:

$$U_{i,j+1} - U_{i,j} = \frac{Dk}{h^2}(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) + krU_{i,j} - kr(U_{i,j})^2$$

$$\alpha = \frac{k}{h^2} \quad \text{نفرض أن}$$

$$U_{i,j+1} - U_{i,j} = D\alpha(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) + krU_{i,j} - kr(U_{i,j})^2$$

$$\Rightarrow U_{i,j+1} = U_{i,j} - 2D\alpha U_{i,j} + krU_{i,j} - kr(U_{i,j})^2 + D\alpha(U_{i+1,j} + U_{i-1,j})$$

ومن ثم نجد أن:

$$U_{i,j+1} = (1 - 2D\alpha + kr - krU_{i,j})U_{i,j} + D\alpha(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) \quad \dots(8)$$

حيث أن المعادلة (8) هي المعادلة المستخدمة للحل بالطريقة الصريحة.

ألان باستخدام الفروقات المركزية فان تقريب الشرط الحدودي الأول في المعادلة (2) عندما $i = 0$ يكون:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{U_{0+1,j} - U_{0-1,j}}{2h} &= 0 \\ \Rightarrow U_{1,j} &= U_{-1,j} \quad j = 0, 1, 2, \dots, n \quad \dots(9) \end{aligned}$$

نعوض المعادلة (9) في المعادلة (8) عندما $i = 0$ نحصل على ما يأتي :

$$U_{0,j+1} = (1 - 2D\alpha + kr - krU_{0,j})U_{0,j} + 2D\alpha U_{1,j} \quad \dots(10)$$

أما تقريب الشرط الحدودي الثاني في المعادلة (2) عندما $i = m$ فإن :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} &= 0 \\ \text{باستخدام الفروقات المركزية نحصل على ما يأتي:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{U_{m+1,j} - U_{m-1,j}}{2h} &= 0 \\ \Rightarrow U_{m+1,j} &= U_{m-1,j} \quad j = 0, 1, 2, \dots, n \quad \dots(11) \end{aligned}$$

نعوض المعادلة (11) في (8) عندما $i = m$ نحصل على :

$$U_{m,j+1} = (1 - 2D\alpha + kr - krU_{m,j})U_{m,j} + 2D\alpha U_{m-1,j} \quad \dots(12)$$

إذاً تقريب معادلة Fisher مع الشروط الحدودية والابتدائية بالطريقة الصريحة يتمثل بالمعادلات الآتية:

$$\begin{aligned} U_{i,0} &= f(x_i) \quad , \quad i = 0, 1, \dots, m \\ U_{0,j+1} &= (1 - 2D\alpha + kr - krU_{0,j})U_{0,j} + 2D\alpha U_{1,j} \quad i = 0 \quad \forall j \geq 0 \\ U_{i,j+1} &= (1 - 2D\alpha + kr - krU_{i,j})U_{i,j} + D\alpha(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) \quad \forall j \geq 0 \\ U_{m,j+1} &= (1 - 2D\alpha + kr - krU_{m,j})U_{m,j} + 2D\alpha U_{m-1,j} \quad i = m \quad \forall j \geq 0 \end{aligned}$$

4.طريقة Crank-Nicholson

تعتمد هذه الطريقة على تقريب حد الانتشار u_{xx} (Diffusion Term) بالمعدل الحسابي لتقريبات الفروقات المركزية لها عند الزمن (j) و $(j+1)$ وكما يأتي [9,8]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{U_{i,j+1} + U_{i,j}}{k} \quad \dots(13)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} \right] \quad \dots(14)$$

الآن نأخذ معادلة Fisher المتمثلة بالمعادلة (1) وباستخدام المعادلتين (13) و (14) نحصل على

$$\frac{1}{k}(U_{i,j+1} - U_{i,j}) = \frac{D}{2h^2} [(U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1}) + (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j})] + r[U_{i,j}(1 - U_{i,j})] \quad \dots(15)$$

بضرب المعادلة (15) في k نحصل على ما يأتي:

$$U_{i,j+1} - U_{i,j} = \frac{kD}{2h^2} U_{i+1,j+1} - \frac{kD}{h^2} U_{i,j+1} + \frac{kD}{2h^2} U_{i-1,j+1} + \frac{kD}{2h^2} U_{i+1,j} - \frac{kD}{h^2} U_{i,j} + \frac{kD}{2h^2} U_{i-1,j} + krU_{i,j} - kr(U_{i,j})^2$$

وبفرض أن $\alpha = \frac{k}{h^2}$ نحصل على ما يأتي:

$$U_{i,j+1} - U_{i,j} = \frac{\alpha D}{2} U_{i+1,j+1} - \alpha D U_{i,j+1} + \frac{\alpha D}{2} U_{i-1,j+1} + \frac{\alpha D}{2} U_{i+1,j} - \alpha D U_{i,j} + \frac{\alpha D}{2} U_{i-1,j} + rkU_{i,j} - rk(U_{i,j})^2$$

$$\Rightarrow U_{i,j+1} - \frac{\alpha D}{2} U_{i+1,j+1} + \alpha D U_{i,j+1} - \frac{\alpha D}{2} U_{i-1,j+1} = U_{i,j} + \frac{\alpha D}{2} U_{i+1,j} - \alpha D U_{i,j} + \frac{\alpha D}{2} U_{i-1,j} + rkU_{i,j} - rk(U_{i,j})^2$$

$$\Rightarrow (1 + \alpha D)U_{i,j+1} - \frac{\alpha D}{2}(U_{i+1,j+1} + U_{i-1,j+1}) = \frac{\alpha D}{2}(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) + (1 - \alpha D + rk - rkU_{i,j})U_{i,j}$$

بضرب طرفي المعادلة بـ $\frac{2}{\alpha D}$:

$$\left(\frac{2}{\alpha D} + 2 \right) U_{i,j+1} - (U_{i+1,j+1} + U_{i-1,j+1}) = (U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) + \left(\frac{2}{\alpha D} - 2 + \frac{2rk}{\alpha D} - \frac{2rk}{\alpha D} U_{i,j} \right) U_{i,j} \quad \dots(16)$$

نلاحظ من المعادلة (16) أن الطرف الأيسر يتضمن ثلاث قيم غير معلومة للدالة (U) عند الخطوة الزمنية الجديدة ($j+1$) ، بينما القيم في الطرف الأيمن كلها معلومة عند الخطوة الزمنية السابقة (j) ، لذلك فإن المعادلة (16) هي علاقة ضمنية (Implicit Relation) .
نعوض المعادلة (9) في (16) عندما ($i=0$) ينتج:

$$..(17) \left(\frac{2}{\alpha D} + 2 \right) U_{0,j+1} - 2U_{1,j+1} = 2U_{1,j} + \left(\frac{2}{\alpha D} - 2 + \frac{2rk}{\alpha D} - \frac{2rk}{\alpha D} U_{0,j} \right) U_{0,j}$$

نعوض المعادلة (11) في (16) عندما ($i=m$) ينتج:

$$\left(\frac{2}{\alpha D} + 2 \right) U_{m,j+1} - 2U_{m-1,j+1} = 2U_{m-1,j} + \left(\frac{2}{\alpha D} - 2 + \frac{2rk}{\alpha D} - \frac{2rk}{\alpha D} U_{m,j} \right) U_{m,j} ..(18)$$

إن المعادلة (16) مع الشروط الحدودية (17) و(18) تؤدي إلى تكوين نظام جبري خطي ثلاثي الأقطار (Tridiagonal Linear Algebraic System)

AX=B

إذ أن A هي مصفوفة المعاملات ثلاثية الأقطار ، و X هو متجه عمودي يحوي قيم المجاهيل في الطرف الأيسر، و B هو متجه عمودي يحوي القيم المعلومة في الطرف الأيمن ، وهكذا يمكن التعبير عن طريقة Crank-Nicholson لحل معادلة Fisher بالشكل الاتي:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{2}{\alpha D} + 2\right) & -2 & & & & & \\ & -1 & \left(\frac{2}{\alpha D} + 2\right) & -1 & & & \\ & & -1 & \left(\frac{2}{\alpha D} + 2\right) & -1 & & \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & -1 & \left(\frac{2}{\alpha D} + 2\right) & -1 \\ & & & & & & & -1 & \left(\frac{2}{\alpha D} + 2\right) & -1 \\ & & & & & & & & -2 & \left(\frac{2}{\alpha D} + 2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{0,j+1} \\ U_{1,j+1} \\ U_{2,j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{m-2,j+1} \\ U_{m-1,j+1} \\ U_{m,j+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2U_{1,j} + \left(\frac{2}{\alpha D} - 2 + \frac{2kr}{\alpha D} - \frac{2kr}{\alpha D} U_{0,j}\right) U_{0,j} \\ (U_{2,j} + U_{0,j}) + \left(\frac{2}{\alpha D} - 2 + \frac{2kr}{\alpha D} - \frac{2kr}{\alpha D} U_{1,j}\right) U_{1,j} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ (U_{m,j} + U_{m-2,j}) + \left(\frac{2}{\alpha D} - 2 + \frac{2kr}{\alpha D} - \frac{2kr}{\alpha D} U_{m-1,j}\right) U_{m-1,j} \\ 2U_{m-1,j} + \left(\frac{2}{\alpha D} - 2 + \frac{2kr}{\alpha D} - \frac{2kr}{\alpha D} U_{m,j}\right) U_{m,j} \end{bmatrix}$$

يمكن حل النظام أعلاه بالطرائق المباشرة (Direct Methods) وقد استخدمت في هذا البحث طريقة الحذف لكأوس .

EXPLICIT D=1 , r=1 h=0.05 k=0.00125 t=0.005 $u(x,0) = \cos^2(\pi x)$	Crank-Nicholson D=1 , r=1 h=0.05 k=0.00125 t=0.005 $u(x,0) = \cos^2(\pi x)$	EXPLICIT D=1 , r=1 h=0.05 k=0.00125 t=0.035 $u(x,0) = \cos^2(\pi x)$	Crank-Nicholson D=1 , r=1 h=0.05 k=0.00125 t=0.035 $u(x,0) = \cos^2(\pi x)$
0.9094	0.9115	0.6298	0.6341
0.8894	0.8914	0.6238	0.6279
0.8315	0.8332	0.6064	0.6099
0.7413	0.7425	0.5793	0.5819
0.6274	0.6280	0.5452	0.5465
0.5011	0.5011	0.5073	0.5073
0.3746	0.3740	0.4694	0.4681
0.2604	0.2590	0.4352	0.4326
0.1696	0.1680	0.4080	0.4045
0.1113	0.1095	0.3905	0.3864
0.0912	0.0893	0.3845	0.3801
0.1113	0.1095	0.3905	0.3864
0.1696	0.1680	0.4080	0.4045
0.2604	0.2592	0.4352	0.4326
0.3746	0.3740	0.4694	0.4681
0.5011	0.5011	0.5073	0.5073
0.6274	0.6281	0.5452	0.5466
0.7413	0.7425	0.5793	0.5819
0.8315	0.8332	0.6064	0.6099
0.8894	0.8914	0.6238	0.6279
0.9094	0.9115	0.6298	0.6341

الجدول (1)

يوضح مقارنة الحل العددي بالطريقة الصريحة وطريقة Crank-Nicholson

من خلال مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها في الجدول (1) نستنتج ان الطريقة الصريحة في حل معادلة Fisher أسرع من طريقة Crank-Nicholson في الوصول إلى حالة التوازن (Equilibrium) وهي الحالة التي تكون فيها كثافة السكان $u(x,t)$ في النظام البيئي متساوية لكل قيم (x) و (t) .

أما طريقة Crank-Nicholson فهي أكثر دقة من الطريقة الصريحة وأسرع في الوصول إلى حالة الإشباع (saturation) وهي الحالة التي تكون فيها كثافة السكان $u(x, t)$ مساوية للحل ($u = 1$) ولا تزداد مهما تقدم الزمن (t).

5. تحليل الإستقرارية للطريقة الصريحة لحل معادلة Fisher

لدراسة إستقرارية الطريقة الصريحة نستخدم طريقة Fourier إذ يتم في هذه الطريقة استبدال الحل $U_{i,j}$ بطريقة الفروقات المنتهية عند الزمن t بالمقدار $\varphi(t)e^{i\beta x}$ حيث أن β هو ثابت موجب [8]، ولتطبيق طريقة Fourier على المعادلة (7) نلجأ إلى تحليل الإستقرارية الخطية [9] إذ نحصل على:

$$\frac{1}{k}(U_{i,j+1} - U_{i,j}) = D \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + rU_{i,j} \quad \dots(19)$$

نعوض عن $U_{i,j}$ بـ $\varphi(t)e^{i\beta x}$ في المعادلة (19) نجد أن:

$$\frac{1}{k}(\varphi(t+k)e^{i\beta x} - \varphi(t)e^{i\beta x}) = \frac{D}{h^2}(\varphi(t)e^{i\beta(x+h)} - 2\varphi(t)e^{i\beta x} + \varphi(t)e^{i\beta(x-h)}) + r\varphi(t)e^{i\beta x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k}(\varphi(t+k) - \varphi(t))e^{i\beta x} = \frac{D}{h^2}\varphi(t)e^{i\beta x}(e^{i\beta h} - 2 + e^{-i\beta h}) + r\varphi(t)e^{i\beta x}$$

بضرب المعادلة السابقة بـ $\frac{k}{e^{i\beta x}}$ نحصل على:

$$\varphi(t+k) - \varphi(t) = \frac{kD}{h^2}\varphi(t)(e^{i\beta h} - 2 + e^{-i\beta h}) + rk\varphi(t)$$

نفرض أن $\alpha = \frac{k}{h^2}$ إذًا:

$$\varphi(t+k) - \varphi(t) = \alpha D\varphi(t)(\cos(\beta h) + i\sin(\beta h) - 2 + \cos(\beta h) - i\sin(\beta h)) + rk\varphi(t)$$

$$\Rightarrow \varphi(t+k) - \varphi(t) = -2\alpha D(1 - \cos(\beta h))\varphi(t) + rk\varphi(t)$$

$$\Rightarrow \varphi(t+k) = -2\alpha D \left[1 - \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \right) \right] \varphi(t) + rk\varphi(t) + \varphi(t)$$

$$\Rightarrow \varphi(t+k) = \left[-4\alpha D \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + rk + 1 \right] \varphi(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} = -4\alpha D \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + rk + 1 = \xi \quad \dots(20)$$

إن الشرط الضروري والكافي للإستقرارية العددية هو :

$$\left| \frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} \right| = |\xi| \leq 1$$

إذ كلما تقدم الحل من سطح مستوي $\varphi(t)$ إلى سطح مستوي آخر $\varphi(t+k)$ فإن $|\varphi(t+k) - \varphi(t)|$ يجب أن تبدأ بالنقصان، أو أن الدالة $\varphi(t)$ يجب أن تكون دالة مقيدة [8].

الآن من المعادلة (20) نحصل على ما يأتي:

$$\begin{aligned} \left| 1 + rk - 4\alpha D \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \right| &\leq 1 \\ \Rightarrow -1 &\leq 1 + rk - 4\alpha D \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \leq 1 \\ \Rightarrow -2 - rk &\leq -4\alpha D \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \leq -rk \quad \dots(21) \end{aligned}$$

بضرب المعادلة (21) ب (-1) نحصل على الآتي:

$$rk \leq 4\alpha D \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \leq 2 + rk$$

لبعض قيم β ، تكون $\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)$ قيمتها واحد لذلك فإن :

$$\begin{aligned} rk &\leq 4\alpha D \leq 2 + rk \\ \Rightarrow \frac{rk}{4D} &\leq \alpha \leq \frac{2 + rk}{4D} \quad \dots(22) \end{aligned}$$

حيث أن $D > 0$.

نعوض عن $\alpha = \frac{k}{h^2}$ في المعادلة (22) لنحصل على ما يأتي:

$$\frac{rk}{4D} \leq \frac{k}{h^2} \leq \frac{2 + rk}{4D} \quad \dots(23)$$

ب طرح المقدار $\frac{rk}{4D}$ من المعادلة (23) نحصل على ما يأتي:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \frac{k}{h^2} - \frac{rk}{4D} \leq \frac{1}{2D} \\
 \Rightarrow 0 &\leq \frac{(4D - rh^2)k}{4Dh^2} \leq \frac{1}{2D} \\
 \Rightarrow 0 &\leq k \leq \frac{2h^2}{4D - rh^2} \quad \dots(24)
 \end{aligned}$$

إذا الطريقة الصريحة لحل معادلة Fisher تكون مستقرة (Stable) إذا تم اختيار الخطوة الزمنية (k) وخطوة الطول (h) بحيث تحقق القيد في المعادلة (24) .

5. تحليل الإستقرارية لطريقة Crank-Nicholson لحل معادلة Fisher

باستخدام طريقة Crank-Nicholson للمعادلة (1) نحصل على ما يأتي:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{k}(U_{i,j+1} - U_{i,j}) &= \frac{D}{2h^2} [(U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1}) + (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j})] + \\
 &\quad r[U_{i,j}(1 - U_{i,j})] \quad \dots(25)
 \end{aligned}$$

لدراسة الإستقرارية لطريقة Crank-Nicholson نلجأ إلى تحليل الإستقرارية الخطية

[9] للمعادلة (25) نحصل على ما يأتي:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{k}(U_{i,j+1} - U_{i,j}) &= \frac{D}{2h^2} [(U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1}) + (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j})] + \\
 &\quad + rU_{i,j} \quad \dots(26)
 \end{aligned}$$

نعوض عن $U_{i,j}$ بـ $\varphi(t)e^{i\beta X}$ في المعادلة (26) نجد أن :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{k}(\varphi(t+k)e^{i\beta X} - \varphi(t)e^{i\beta X}) &= \frac{D}{2h^2} [\varphi(t+k)e^{i\beta(X+h)} - 2\varphi(t+k)e^{i\beta X} + \\
 &\quad + \varphi(t+k)e^{i\beta(X-h)} + \varphi(t)e^{i\beta(X+h)} - 2\varphi(t)e^{i\beta X} + \varphi(t)e^{i\beta(X-h)}] + r\varphi(t)e^{i\beta X}
 \end{aligned}$$

بضرب طرفي المعادلة بـ k نحصل على ما يأتي:

$$\begin{aligned}
 (\varphi(t+k) - \varphi(t))e^{i\beta X} &= \frac{Dk}{2h^2} [\varphi(t+k)e^{i\beta h} - 2\varphi(t+k) + \\
 &\quad + \varphi(t+k)e^{-i\beta h} + \varphi(t)e^{i\beta h} - 2\varphi(t) + \varphi(t)e^{-i\beta h}]e^{i\beta X} + rk\varphi(t)e^{i\beta X}
 \end{aligned}$$

بضرب طرفي المعادلة بـ $\frac{1}{e^{i\beta X}}$ وبفرض أن $\alpha = \frac{k}{h^2}$ نحصل على ما يأتي:

$$\varphi(t+k) - \varphi(t) = \frac{\alpha D}{2} (e^{i\beta h} - 2 + e^{-i\beta h})\varphi(t+k) + \frac{\alpha D}{2} (e^{i\beta h} - 2 + e^{-i\beta h})\varphi(t) + rk\varphi(t)$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \varphi(t+k) - \varphi(t) = \frac{\alpha D}{2} (\cos(\beta h) + i \sin(\beta h) - 2 + \cos(\beta h) - i \sin(\beta h)) \\
 &\varphi(t+k) + \frac{\alpha D}{2} (\cos(\beta h) + i \sin(\beta h) - 2 + \cos(\beta h) - i \sin(\beta h)) \varphi(t) + rk \varphi(t) \\
 &\Rightarrow \varphi(t+k) - \varphi(t) = \frac{\alpha D}{2} (2 \cos(\beta h) - 2) \varphi(t+k) + \frac{\alpha D}{2} (2 \cos(\beta h) - 2) \varphi(t) + rk \varphi(t) \\
 &\Rightarrow \varphi(t+k) - \varphi(t) = [-\alpha D(1 - \cos(\beta h))] \varphi(t+k) + \\
 &\quad + [-\alpha D(1 - \cos(\beta h)) + rk] \varphi(t) \\
 &\Rightarrow \varphi(t+k) - \varphi(t) = \left[-\alpha D \left(1 - \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) \right) \right] \varphi(t+k) + \\
 &\quad + \left[-\alpha D \left(1 - \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) \right) + rk \right] \varphi(t) \\
 &\Rightarrow \varphi(t+k) = \left[-2\alpha D \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right] \varphi(t+k) + \left[-2\alpha D \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) + rk \right] \varphi(t) + \varphi(t) \\
 &\Rightarrow \frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} + \left[2\alpha D \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right] \frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} = 1 - \left[2\alpha D \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) - rk \right] \\
 &\Rightarrow \left[1 + 2\alpha D \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right] \frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} = 1 - \left[2\alpha D \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) - rk \right] \\
 &\Rightarrow \frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} = \frac{1 - \left[2\alpha D \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) - rk \right]}{1 + \left[2\alpha D \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right]} = \xi \quad \dots(27)
 \end{aligned}$$

بوساطة الشرط الضروري والكافي للإستقرارية العددية الذي هو [8]:

$$\left| \frac{\varphi(t+k)}{\varphi(t)} \right| \leq 1$$

من المعادلة (27) نجد ان :

$$\left| \frac{1 - \left[2\alpha D \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) - kr \right]}{1 + \left[2\alpha D \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right]} \right| \leq 1$$

ولكي تكون المتباينة أعلاه صحيحة يجب أن يتحقق الشرط الأتي :

$$1 - 2\alpha D \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + kr \leq 1 + 2\alpha D \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)$$

$$\Rightarrow kr \leq 4\alpha D \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)$$

لبعض قيم β فإن $\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)$ قيمتها واحد لذلك نجد:

$$\alpha \geq \frac{kr}{4D} \quad \dots(28)$$

نعوض عن $\alpha = \frac{k}{h^2}$ في المعادلة (28) نحصل على :

$$\dots(29) \quad h^2 \leq \frac{4D}{r}$$

إذاً طريقة Crank-Nicholson لحل معادلة Fisher تكون مستقرة (Stable) إذا تم اختيار خطوة الطول (h) بحيث تحقق الشرط في المعادلة (29) ، أما الخطوة الزمنية (k) فهي غير مشروطة في طريقة Crank-Nicholson .

المصادر

- [1] Fisher, R.A., (1937), **The Wave of Advance of Advantageous Genes**, Annals of Eugenics 7, PP. 355–369.
- [2] Fory's, U. and C.A. Marciniak., (2003), “Logistic Equations in Tumour Growth Modelling”, **Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.**, Vol. 13, No. 3, PP. 317–325.
- [3] Gourley, S.A., (2000), “Travelling Front Solutions of a Nonlocal Fisher Equation”, **J.Math. Biol.** 41, PP. 272–284.
- [4] Ortega C.V., J. Fort and V. Mendez, , (2004), “The Role of the Delay Time in The Modeling of Biological Range Expansions”, **J. Ecology**, 85 (1), PP. 258–264.
- [5] Pesin, Y. and A. Yurchenko , (2004), “Some Physical Models of the Reaction–Diffusion Equation and Coupled Map Lattices”, **Russian Math. Surveys** Vol. 59, No. 3, To Appear.
- [6] Puri, S. and K. J. Wiese , (2002), **Perturbative Linearization of Reaction–Diffusion Equations**, arXiv: Cond–Mat / 0209524 V1.
- [7] Raposo, E. P. and D. Bazeia , (1998), “Exact Kink Solutions in the Presence of Diffusion”, **Dispersion and Polynomial Non linearity**. MIT–CTP – 2742, ar Xiv:solv–int / 9805008 V1.
- [8] Shanthakumar, M., (1989), **Computer Based Numerical Analysis**, Khanna Publishers.
- [9] Smith, G. D., (1965), **Numerical Solution of Partial Differential Equations**, London: Oxford University Press.