

Flow of Thin Liquid Film on an Inclined Solid Surface

Khidr M.S. Khidr

College of Science

University of Kirkuk, Iraq

Received on: 01/02/2007

Accepted on: 16/04/2007

ABSTRACT

In this paper, we consider flow of thin liquid film on an inclined solid surface with an inclination angle α . We use the Navier-Stokes equations to obtain equations that govern such flow. We solve these equations analytically with an appropriate boundary conditions to determine the thickness of the film for different values of the inclined angle α .

Keywords: flow, thin liquid film, inclined solid surface, Navier-Stokes equations.

جريان الغشاء السائل على سطح صلب مائل

خضر محمد صالح خضر

كلية العلوم، جامعة كركوك

تاريخ قبول البحث: 2007/04/16

تاريخ استلام البحث: 2007/02/01

الملخص

في هذا البحث تم التطرق إلى دراسة الجريان في الأغشية الرقيقة على سطح صلب مائل بزاوية α . لقد استخدمت معادلات نافر - ستوكس للحصول على المعادلات التي تحكم هذا النوع من الجريان وقد تم حل هذه المعادلات تحليلياً باستخدام شروط حدودية ملائمة وبعد ذلك تم حساب سمك الغشاء لقيم مختلفة لزاوية الميل α .

الكلمات المفتاحية: الجريان، الأغشية الرقيقة، سطح صلب مائل، معادلات نافر - ستوكس.

المقدمة : Introduction

إن ميكانيكية الأغشية الرقيقة (Thin films) للسوائل لها أهمية كبيرة في كثير من التطبيقات الصناعية كعمليات الطلاء وهي بصورة عامة تتكون من هواء وسائل مع الشد السطحي (Surface tension) وقد أجريت العديد من الدراسات في هذا النوع من الأغشية. [2]

إذ درس (E.O. Tuck and L. W. Schwartz, 1990) نحافة

الأغشية الرقيقة السائلة على سطح صلب مع وجود الشد السطحي، ودرس (Igor. L. Kiakhandler and Gregory I. Sivashinsky, 1996) جريان الأغشية الرقيقة على

سطح مائل .

كما قام كل من (James. J. kriegsmann and Michael J. Miksis, 1998) بدراسة الأغشية الرقيقة على سطح صلب مائل مع وجود الشد السطحي و الجاذبية وباستخدام نظرية التزيت .

و درس (S. A. Suslov and A. J. Roberts, 1998) خواص الشروط الابتدائية لنموذج التزيت لجريان الأغشية الرقيقة . كما درس (Roman O. Grigoriev, 2002) خط التماس غير المستقر للأغشية الرقيقة على سطح صلب .

و درس (D. Gao, N. B. Morley, V. Dhir, 2003) جريان الأغشية الرقيقة على سطح عمودي ومائل والتي تشبه حركتها حركة الأمواج . كما درس (Lou kondic, Javier A. Diez, 2005) حول حركة الأمواج غير التافهة في الأغشية الرقيقة السائلة المائلة عند خط التماس . وفي بحثنا هذا سوف نتطرق إلى دراسة الجريان اللزج في الأغشية الرقيقة السائلة والمائلة بزاوية α على سطح صلب.

(2.1) المعادلات التي تحكم الجريان : Governing equations

تأمل غشاء سائلا رقيقا يتحرك يبطء على سطح صلب إلى الأعلى وبزاوية ميل (α) عن الأفق وأن القوى التي تسوق هذا النوع من الجريان هو الشد السطحي كما أن قوة الجذب الأرضي تؤثر في الغشاء أيضا كما موضح في الشكل (1-1) . نفرض أن الغشاء منتظم في الاتجاه المستعرض (Transvers direction) .

لتكن P يمثل الضغط و u, w دوال لـ (x, z, t) حيث أن u, w تمثلان مركبات السرعة باتجاه الأحداثي x, z على الترتيب وأن t يمثل الزمن .
ليكن معادلة السطح الحر للغشاء بالصيغة الآتية:

$$z = h(x, t) \quad \dots(2.2)$$

إن معادلات نافير - ستوكس للجريان الثنائي البعد باتجاه الأحداثي x, z على الترتيب تعطى بالصيغة الآتية :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \quad \dots(2.3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \quad \dots(2.4)$$

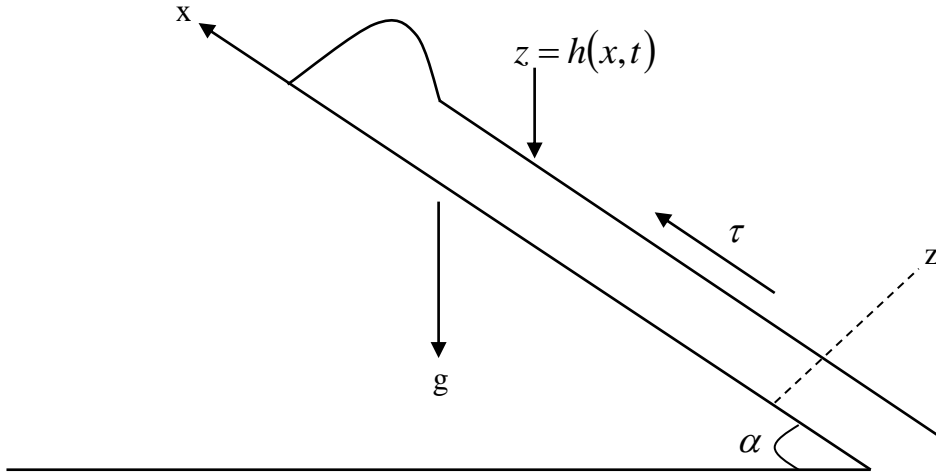
بما أن السائل لزج وان قوى اللزوجة تكون هي المسيطرة على الجريان يمكن إهمال حد القصور الذاتي وهكذا فإن المعادلتين (2.3) و (2.4) تختزلان إلى الصيغة الآتية :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \rho g \sin(\alpha) \quad \dots(2.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \cos(\alpha) \quad \dots(2.6)$$

كما أن معادلة الاستمرارية للجريان الثنائي البعد لها الصيغة الآتية :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots(2.7)$$



الشكل (1.1)

مقطع عرضي لغشاء رقيق على سطح صلب مائل بزاوية α

(3.1) الشروط الحدودية : Boundary conditions

1. شرط جهد القص : (Tangential stress conditions) على السطح الحر للغشاء

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_s = 0 \quad \text{فأن} \quad \text{عندما} \quad z = h \quad \dots(3.2)$$

حيث أن s : تمثل القيم على السطح الحر للغشاء .

2. شرط الجهد العمودي : Normal-stress condition

$$p = -\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad \text{عندما} \quad z = h \quad \text{فأن} \quad \dots(3.2)$$

حيث أن σ يمثل الشد السطحي وأن $\frac{\partial h}{\partial x} \ll 1$.

3. شرط عدم الانزلاق : No-slip condition

$$u = 0 \quad \text{عندما } z = 0 \quad \text{فأن} \quad \dots(3.4)$$

4. شرط المشتقة التي تتبع الجسيم على السطح الحر .

فالمشتقة المادية (المشتقة التابعة) Material derivative هي المشتقة التي تتبع الجسيم على السطح الحر وتعرف رياضياً بالصيغة :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

يمكن كتابة معادلة السطح الحر للغشاء (2.2) بالصيغة :

$$F(x, z, t) = z - h(x, t)$$

بما أن السطح الحر يمثل خط انسياب فأن المشتقة المادية تساوي صفراً أي أن :

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

عندما $z = h$

$$-\frac{\partial h}{\partial t} - u \frac{\partial h}{\partial x} + w = 0 \quad \dots(3.5)$$

وبتكامل المعادلة (2.7) بالنسبة إلى z وتعويضها في المعادلة (3.5) عندما $z = h$ نحصل على :

$$-\frac{\partial h}{\partial t} - u \frac{\partial h}{\partial x} - h \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$-\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(uh) = 0$$

$$-\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(uh) \quad \dots(3.6)$$

(4.1) الأشتقاق والتكاملات اللازمة لإيجاد المعادلة التي تحكم الجريان :

تكامل المعادلة (2.6) بالنسبة إلى z فنحصل على :

$$p(x, t) = -\rho g \cos(\alpha)z + f_1(x, t)$$

...(4.2)

حيث أن f_1 ثابت التكامل .

بمقارنة المعادلة (4.2) مع الشرط الحدي (3.3) عندما $z = h$ نحصل على :

$$-\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -\rho g \cos(\alpha)h + f_1(x, t)$$

$$f_1(x,t) = -\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \rho g \cos(\alpha) h \quad \dots(4.3)$$

نعوض المعادلة (4.3) في المعادلة (4.2) فنحصل على :

$$p(x,t) = -\rho g \cos(\alpha) z - \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \rho g \cos(\alpha) h \quad \dots(4.4)$$

نشق المعادلة (4.4) بالنسبة إلى x فنحصل على :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \rho g \cos(\alpha) \frac{\partial h}{\partial x} \quad \dots(4.5)$$

نقارن المعادلة (4.5) مع المعادلة (2.5) فنحصل على :

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \rho g \sin(\alpha) = -\sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \rho g \cos(\alpha) \frac{\partial h}{\partial x} \quad \dots(4.6)$$

تكامل المعادلة (4.6) بالنسبة إلى z فنحصل على :

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} = \rho g \sin(\alpha) z - \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} z + \rho g \cos(\alpha) \frac{\partial h}{\partial x} z + f_2(x,t) \quad \dots(4.7)$$

حيث أن f_2 ثابت التكامل .

باستخدام الشرط الحدي (3.2) عندما $z = h$ في المعادلة (4.7) نحصل على :

$$0 = \rho g \sin(\alpha) h - \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h + \rho g \cos(\alpha) \frac{\partial h}{\partial x} h + f_2(x,t)$$

$$f_2(x,t) = -\rho g \sin(\alpha) h + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h - \rho g \cos(\alpha) \frac{\partial h}{\partial x} h \quad \dots(4.8)$$

نعوض المعادلة (4.8) في المعادلة (4.7) فنحصل على :

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} = \rho g \sin(\alpha) z - \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} z + \rho g \cos(\alpha) \frac{\partial h}{\partial x} z -$$

$$\rho g \sin(\alpha) h + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h - \rho g \cos(\alpha) \frac{\partial h}{\partial x} h \quad \dots(4.9)$$

تكامل المعادلة (4.9) بالنسبة إلى z فنحصل على :

$$\mu u = \rho g \sin(\alpha) \frac{z^2}{2} - \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{z^2}{2} + \rho g \cos(\alpha) \frac{\partial h}{\partial x} \frac{z^2}{2} - \rho g \sin(\alpha) h z +$$

$$\sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h z - \rho g \cos(\alpha) \frac{\partial h}{\partial x} h z + f_3(x,t) \quad \dots(4.10)$$

حيث أن f_3 ثابت التكامل .

باستخدام الشرط الحدي (3.4) عندما $z = 0$ في المعادلة (4.10) نحصل على :

$$f_3(x,t) = 0 \quad \dots(4.11)$$

نعوض المعادلة (4.11) في المعادلة (4.10) عندما $z = h$ نحصل على :

$$\mu u = -\frac{\rho g}{2} \sin(\alpha) h^2 - \frac{\rho g}{2} \cos(\alpha) \frac{\partial h}{\partial x} h^2 + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h^2 \quad \dots(4.12)$$

بقسمة المعادلة (4.12) على μ وبضربها في h نحصل على :

$$uh = -\frac{\rho g}{2\mu} \sin(\alpha) h^3 - \frac{\rho g}{2\mu} \cos(\alpha) \frac{\partial h}{\partial x} h^3 + \frac{\sigma}{2\mu} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h^3 \quad \dots(4.13)$$

نشتق المعادلة (4.13) بالنسبة الى x نحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial x}(uh) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{\rho g}{2\mu} \sin(\alpha) h^3 - \frac{\rho g}{2\mu} \cos(\alpha) \frac{\partial h}{\partial x} h^3 + \frac{\sigma}{2\mu} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h^3 \right\} \quad \dots(4.14)$$

بتعويض المعادلة (3.6) في المعادلة (4.14) نحصل على :

$$-\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{\rho g}{2\mu} \sin(\alpha) h^3 - \frac{\rho g}{2\mu} \cos(\alpha) \frac{\partial h}{\partial x} h^3 + \frac{\sigma}{2\mu} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h^3 \right\} \quad \dots(4.15)$$

(5.1) الحالة اللازمية : Steady state

في حالة الجريان اللازمي فإن المعادلة (4.15) تصبح بالصيغة الآتية :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{\rho g}{2\mu} \sin(\alpha) h^3 - \frac{\rho g}{2\mu} \cos(\alpha) \frac{\partial h}{\partial x} h^3 + \frac{\sigma}{2\mu} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h^3 \right\} = 0 \quad \dots(5.2)$$

$$-\frac{\rho g}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \sin(\alpha) h^3 - \frac{\rho g}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \cos(\alpha) \frac{\partial h}{\partial x} h^3 + \frac{\sigma}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h^3 = 0 \quad \dots(5.3)$$

نضرب المعادلة (5.3) في $\frac{2\mu}{\rho g}$ فنحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sin(\alpha) h^3 + \cos(\alpha) \frac{\partial h}{\partial x} h^3 - \frac{\sigma}{\rho g} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h^3 \right\} = 0 \quad \dots(5.4)$$

وأن المعادلة (5.4) هي المعادلة الأساسية التي تحكم الجريان .

(6.1) المتغيرات اللابعديّة: Non-dimensional variables

تعرف المتغيرات x, h بدلالة المتغيرات اللابعديّة $\xi, f(\xi)$ وكما يأتي [1] :

$$\left. \begin{aligned} x &= \left(\frac{\sigma}{\rho g}\right)^{\frac{1}{2}} \zeta \\ h &= \left(\frac{\sigma}{\rho g}\right)^{\frac{1}{2}} f(\zeta) \end{aligned} \right\} \dots(6.2)$$

نعوض المعادلة (6.2) في المعادلة (5.4) فنحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sin(\alpha) \left(\frac{\sigma}{\rho g}\right)^{\frac{3}{2}} f^3 + \cos(\alpha) \left(\frac{\sigma}{\rho g}\right)^{\frac{3}{2}} f^3 f' - \left(\frac{\sigma}{\rho g}\right)^{\frac{3}{2}} f^3 f''' \right\} = 0 \quad \dots(6.3)$$

بضرب المعادلة (6.3) في $\left(\frac{\sigma}{\rho g}\right)^{-\frac{3}{2}}$ نحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sin(\alpha) f^3 + \cos(\alpha) f^3 f' - f^3 f''' \right\} = 0 \quad \dots(6.4)$$

نكامل المعادلة (6.4) فنحصل على :

$$\sin(\alpha) f^3 + \cos(\alpha) f^3 f' - f^3 f''' = H \quad \dots(6.5)$$

الآن سنركز اهتمامنا على الحلول التي لها خط اتصال حيث $f(0) = 0$.

وان خط الاتصال (خط التماس) Contact line هو خط أو نقطة التقاء السائل مع سطح

صلب أو سائل آخر .

نفترض أن خط الاتصال يقع عند $\zeta = 0$ كذلك عندما $\zeta \rightarrow -\infty$ فإن سمك الغشاء

يقترّب من الواحد , ولكن بما أن الغشاء يوازي الاحداثي ζ فإنه عندما $\zeta \rightarrow -\infty$ فإن

$f'(-\infty) = f'''(-\infty) = 0$ وهكذا فإن $H = 0$ في المعادلة (6.5) وبقسمة المعادلة على

f^3 تختزل إلى الصيغة الآتية:

$$f''' - \cos(\alpha) f' = \sin(\alpha) \quad \dots(6.6)$$

نكامل المعادلة (6.6) فنحصل على :

$$f'' - \cos(\alpha) f = \sin(\alpha) \zeta + A_1 \quad \dots(6.7)$$

وان الحل العام للمعادلة (6.7) هو :

$$f(\zeta) = c_1 e^{\sqrt{\cos(\alpha)} \zeta} + c_2 e^{-\sqrt{\cos(\alpha)} \zeta} - \tan(\alpha) \zeta - \frac{A_1}{\cos(\alpha)} \quad \dots(6.8)$$

الشروط الابتدائية :

$$\zeta = 0 \Rightarrow f = 0$$

$$\zeta = -5 \Rightarrow f = 1$$

نعوض الشروط الابتدائية في الحال العام فنحصل على :

$$c_2 = \frac{1 + \tan(\alpha) + \frac{A_1}{\cos(\alpha)} - \frac{A_1}{\cos(\alpha)} e^{\sqrt{\cos(\alpha)}}}{e^{-\sqrt{\cos(\alpha)}} - e^{\sqrt{\cos(\alpha)}}}$$

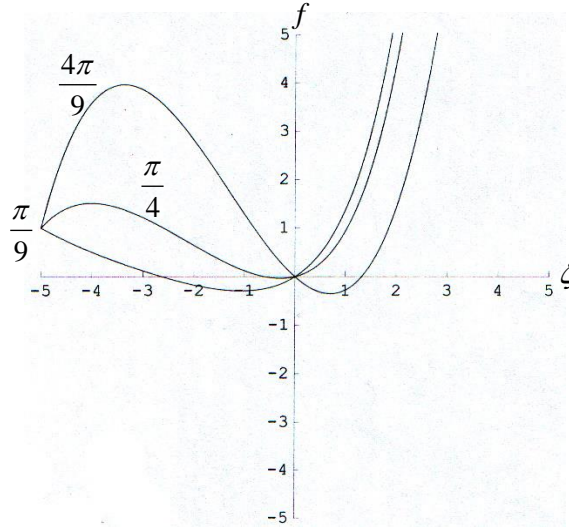
$$c_1 = \frac{A_1}{\cos(\alpha)} - c_2$$

بتعويض الثوابت c_2, c_1 في الحل العام (6.8) نحصل على :

$$f(\zeta) = \left(\frac{A_1}{\cos(\alpha)} - c_2 \right) e^{\sqrt{\cos(\alpha)} \zeta} + c_2 e^{-\sqrt{\cos(\alpha)} \zeta} - \tan(\alpha) \zeta - \frac{A_1}{\cos(\alpha)} \quad \dots (6.9)$$

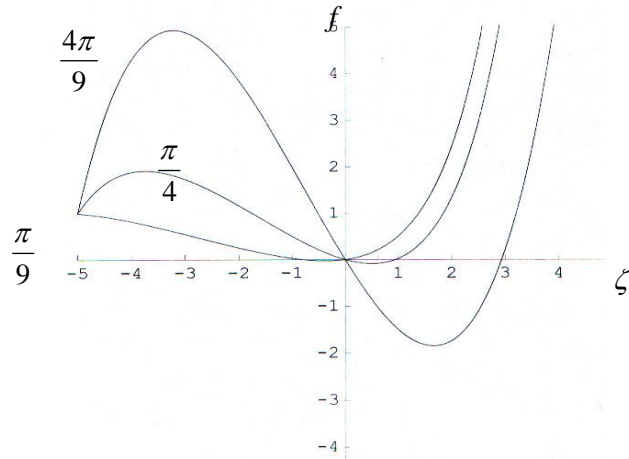
إن حلول المعادلة (6.7) موضحة في الشكل (1.2) عندما $A_1 = 1$ ولقيم α ، $\frac{\pi}{9}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{4\pi}{9}$.

والشكل (1.3) يوضح عندما $A_1 = \frac{1}{2}$ ولقيم α ، $\frac{\pi}{9}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{4\pi}{9}$.



الشكل (1.2)

يمثل منحنيات الحلول للمستوي (ζ, f) للمعادلة (6.9) عندما $A_1 = 1$ ولزوايا α



الشكل (1.3)

يمثل منحنيات الحلول للمستوي (ζ, f) للمعادلة (6.9) عندما $A_1 = \frac{1}{2}$ ولزوايا α

الاستنتاجات : Conclusions

في دراستنا للجريان للازمني للأغشية الرقيقة السائلة على سطح صلب مائل تبين من حلول المعادلة التي تحكم هذا الجريان بان سمك الغشاء يصل إلى اقل ما يمكن عندما تكون زاوية الميلان اقل ما يمكن لقيم ζ الموجبة .
 إما قيم ζ السالبة فان سمك الغشاء بدأ بالتذبذب إلى إن يصل قيمته المحاذية أي انه عندما $\zeta \rightarrow -\infty$ فان $f \rightarrow 1$.

المصادر

- (1) ستريتر. فكتور. بنيامين. ويلي (1984) ميكانيك الموائع ، ترجمة : نبيل زكي مرقص وفوزي إبراهيم ، جامعة صلاح الدين .
- (2) سعيد ، مهند عاصم (2002) الجريان اللازمي في الاغشية الرقيقة ياهمال قوى القصور الذاتي ، أطروحة ماجستير ، كلية التربية ، جامعة الموصل 2002 .
- [3] Cao, D.,N.B.NMorley, V.Dhin (2003) “Numerical simulation of wavy falling film flow using VOF method” **Journal of computational physics** 192624-642.
- [4] Igor,L.Kliakhandler and Gregory I. Sivashinsky (1996) “Viscous damping and instabilities in stratified liquid film flowing down a slightly inclined plane” **Phys.Fluids**,Vol.9 No.1,January .
- [5] James, J.Kriegsmann and Michael J. Miksis (1998) “Pressure driven disturbances on a thin viscous film” **Phys.Fluids**,Vol.10,No.6,June .
- [6] Lou Kondic,Javier A.Dies “On nontrivial traveling waves in thin film flows including contact lines” **Physics D** 209(2005)135-144.
- [7] Raman, O.Grigoriev (2002) “Contact line Instability and pattern Selection in thermally driven liquid films” November.
- [8] Lou Kondic,Javier A.Dies “On nontrivial traveling waves in thin film flows including contact lines” **Physics D** 209(2005)135-144.
- [8] Suslov, S.A. and A.J.Roberts (1998) “Proper initial conditions for the lubrication model of the flow of a thin film of fluid” **ar Xivchao –dyn/9804018** Vol.8 Apr.
- [9] Tuck,E.O. and L.W.Schwartz (1990)“Numerical and asymptotic study of some third-order ordinary differential equations relevant to draining and coating flows” ,No.3,pp.453-469,September .