

Stability Analysis for Steady State Solutions of Burger Equation

Saad Abdullah Manna

College of Education

University of Duhok

Received on: 17/10/2006

Badran Jassim Salem

College of Basic Education

University of Mosul

Accepted on: 24/12/2006

ABSTRACT

The Stability Analysis of Steady State Solution of Burger equation by using Fourier mode Stability analysis in two cases has been considered , the first one when the amplitude is constant and the second one when the amplitude is variable .

In the first case the steady state solution is always stable and the second case is conditionally stable . In the second case the comparison between the analytical solution and numerical solution of Galerkin technique are the same.

Keywords: Stability Analysis, Burger equation, Galerkin technique.

تحليل الاستقرارية للحلول اللازمية لمعادلة Burger

بدران جاسم سالم

كلية التربية الاساسية

جامعة الموصل

تاريخ قبول البحث: 2006/12/24

سعد عبد الله مناع

كلية التربية

جامعة دهوك

تاريخ استلام البحث: 2006/10/17

المخلص

تمت دراسة استقرارية الحلول اللازمية لمعادلة Burger باستخدام طريقة تحليل الاستقرارية من النمط Fourier في حالتين ,الأولى في حالة كون السعة ثابتة والثانية في حالة كون السعة متغيرة إذ تم استخدام طريقة Galerkin العددية مع الحل التحليلي في هذه الحالة . وقد تبين انه في حالة كون السعة ثابتة فان الحل يكون مستقر دائماً, أما في حالة كون السعة متغيرة فان الحل يكون مشروط كما تم في الحالة الثانية مقارنة النتائج التحليلية بالحل العددي لطريقة Galerkin وقد تم الحصول على نفس النتائج.

الكلمات المفتاحية: تحليل الاستقرار ، معادلة Burger ، تقنية Galerkin.

Introduction

1- المقدمة :

أن أي نظام مهما كانت طبيعته إذا وجد في حالة ما S يقال أن الحالة S مستقرة (stable) إذا كانت الإزعاجات أو التأثيرات الخارجية التي يتعرض لها النظام لا تؤثر في الحالة S . النظام الشمسي على سبيل المثال موجود حالياً في حالة معتمدة على الزمن ذلك أن الكواكب تدور حول الشمس بصورة منتظمة وفي حالة دخول جسم سماوي إضافي صغير إلى النظام الشمسي فان

هذا النظام لا يتأثر بصورة مهمة إذ لا تتأثر الحالة الأصلية لهذا النظام بالإزعاجات الصغيرة , أي أن النظام الشمسي مستقر فيما له علاقة بهذه الإزعاجات .

ومن الأمثلة المهمة الآخرة على مفهوم الاستقرار Stability حركة الأميبا تحت تأثير الانتشار Diffusion والانجذاب الكيميائي إذ أن هذا الأخير هو عبارة عن الحركة الناتجة عن التغيرات في تركيز المواد الكيميائية التي تفرزها الأميبا نفسها , أن هذا النموذج يكون غير مستقر إذ كانت قابلية الحركة (Motility) أو معدل التحليل (Decay Rate) للمادة الجاذبة صغيرين أو إذ كان معدل الإفراز (Secretion Rate) أو قوة الانجذاب الكيميائي كبيرين . ولهذه الظاهرة أهمية كبيرة في علم الأحياء التطوري, والمفهوم نفسه ينطبق على جميع الظواهر الطبيعية الأخرى . [10]

تعلقت دراسة Benny & chow في عام 1986 [4] بعدم الاستقرار التي تنشأ من نوع من الجريان بوجود سطح حر وفي هذا النوع من الدراسة فإنه يحتوي ضمناً على عدم الاستقرار ثلاثية الأبعاد في جريان زمني ثنائي الأبعاد ذي تأثير طفيف .

كما اهتم Shiragami & Inane في عام 1988 [11] بدراسة جريان المائع بعد أن يأخذ شكله الكامل في وعاء منحنى باستخدام التقنيات العددية , وقاما بدراسة تأثير الانحناء من دون الجريان الثانوي وتوصلاً إلى الحل التحليلي اللازمي للحالة وكما أكدوا أن تأثير الانحناء يمكن إهماله .

كما قام Howes عام 1990 [8] بدراسة الإزعاج الذي يكون على شكل موجة ذات سعة صغيرة تنتقل عبر عقد قناة ملساء واستنتج حلاً تناظرياً يشبه حل معادلات الاضطراب عندما يكون الجريان بشكل أمواج ذات سعة صغيرة ويمكن عد هذا امتداد لدراسة سابقة أجراها لحالة واقعية على الجريان المضطرب .

وأجرى Buses & Clever عام 1994 [5] الحسابات العددية المعتمدة على توسيع طريقة Galerkin للتغيرات المعتمدة وقد طبقت للجريانات الثابتة الزمنية الدورية ثلاثية الأبعاد , كما أن استقرارية الحلول الثابتة قد تم تحليلها .

درس zhong عام (1997) [12] معادلة Burger بوجود عدد رينولد كبير وتبين له عند استخدام عدد رينولد كبير ($\geq 10^5$) يحصل على دقة عالية وبتقسيمات اقل .

واقترح Fortunate & Kurizhi عام 1998 [7] طريقة تعمل وبشكل مؤثر على استقرارية النقاط الصامدة في الحركة التقليدية لنظام جيشاني حساس .

وفي عام (2000) درس Atoll & King [2] استقرارية طريقة العناصر المنتهية لمعادلة Burger وتبين لهما في معامل لزوجة صغير جداً تكون طريقة Galerkin غير مستقرة .

وفي عام (2001) ناقش Leonenko & Meluikovn [9] تجانس معادلة الحرارة بجهد خطي وعلاقة معادلة Burger مع البيانات العشوائية . وفي هذه الدراسة تمت دراسة مفصلة لاستقرارية الحلول اللازمونية لمعادلة Burger باستخدام تحليل الاستقرارية نمط Fourier في حالتين الأولى في حالة كون السعة ثابتة والثانية في حالة كون السعة متغيرة إذ تم استخدام طريقة Galerkin العددية ثم تمت مقارنتها بالحل التحليلي للسعة.

2- تحليل الاستقرارية:

أن هذا النوع من دراسة الاستقرارية يوضح كثيراً من خواص الاستقرارية الشائعة في ميكانيك الموائع والفيزياء وعلم الأحياء إذ يوضح كيف أن تغير أو إزعاجاً صغيراً في النظام الفيزيائي يمكن أن يؤدي في النهاية إلى نتائج بعيدة كما يساعدنا هذا النوع من دراسة تحليل الاستقرارية في دراسة السلوك المستقبلي للنظام الفيزيائي ويبين كذلك تأثير عدم الاستقرارية في النظام [10] .

3- التحويلات اللابعدية لمعادلة Burger :

لتحويل معادلة Burger المتمثلة بـ [6]

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad \dots(1)$$

$$x \in (0,1)$$

$$u(x,0) = \phi(x)$$

$$u_x(1,t) = u_x(0,t) = 0$$

$$t > 0$$

$$\varepsilon > 0$$

إلى الحالة اللابعدية في x, t فأنتنا نحتاج إلى التحويلات الآتية :

$$X = \frac{x}{L}$$

$$T = \frac{t}{L^2}$$

وباستخدام هذا التحويل نحصل على

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial u(x,t)}{\partial X}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial X^2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial u(x,t)}{\partial T}$$

وبعد تعويض الكميات أعلاه في المعادلة (1) ينتج:

$$\frac{1}{L^2} \frac{\partial u(x,t)}{\partial T} + u(x,t) \frac{1}{L} \frac{\partial u(x,t)}{\partial X} = \varepsilon \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial X^2}$$

وبما أن :

$$u(x,y) \frac{\partial u(x,t)}{\partial X} = \frac{1}{2} \frac{\partial (u(x,t))^2}{\partial X}$$

[10].

فإن

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial T} = \varepsilon \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial X^2} - \frac{L}{2} \frac{\partial (u(x,t))^2}{\partial X} \quad \dots(2)$$

$$0 < X < 1$$

$$\varepsilon > 0$$

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$$

حيث المعادلة (2) تمثل الصيغة اللابعدية لمعادلة Burger .

4- تحليل الاستقرار من النمط Fourier لمعادلة Burger :

4-1- تحليل الاستقرار في حالة السعة ثابتة :

أن الفكرة الأساسية لهذه الطريقة هي افتراض الحل على الشكل الآتي:

$$u(X,T) = u_1(X) + u_2(X,T) \quad \dots(3)$$

[10].

إذ تمثل $u_1(X)$ الحل اللازمي للمعادلة (2) في حين تمثل $u_2(X,T)$ الإزعاج الذي يعانیه النظام حيث

$$u_2(X,T) = Ae^{ik(X-cT)} \quad \dots(4)$$

$$A > 0 , k > 0 , c = c_1 + ic_2 , i = \sqrt{-1}$$

إذ A يمثل سعة الموجة ، k يمثل العدد الموجي (عدد الذبذبات التي تحدث في زمن معين في الفترة $[-\pi, \pi]$) ، c هي سرعة الموجة وهي ذات قيمة معقدة ، وان القيمة الموجبة أو السالبة لـ c_2 هي التي تحدد حالة الاستقرار أو عدمه ، ففي حالة $c_2 > 0$ يزداد الإزعاج بمرور الزمن ، وان الحل يكون غير مستقر . أما في حالة كون $c_2 < 0$ فان الإزعاج يتلاشى بمرور الزمن ويكون الحل مستقر في هذه الحالة . أما عندما $c_2 = 0$ فهي تعطي منحنى الاستقرار المتعادلة وهو المنحنى الذي يفصل بين المنطقة المستقرة وغير المستقرة .

وبتعويض المعادلة (3) في المعادلة (2) نحصل على

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial T} = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial X^2} \right) - \frac{L}{2} \left(\frac{\partial (u_1(x,t))^2}{\partial X} + \frac{\partial (u_2(x,t))^2}{\partial X} \right)$$

وبفصل الحالتين الزمنية واللازمية نحصل على

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial T} = \varepsilon \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial X^2} - \frac{L}{2} \frac{\partial (u_2(x,t))^2}{\partial X} \quad \dots(5)$$

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial X^2} - \frac{L}{2} \frac{\partial (u_1(x,t))^2}{\partial X} = 0 \quad \dots(6)$$

حيث أن المعادلة (5) تمثل الحالة الزمنية في حين المعادلة (6) تمثل الحالة اللازمية ، والتي تكون بالشكل التالي:

$$u_1(X) = \sqrt{2c_0} \tanh\left(\frac{\sqrt{2c_0}}{2\varepsilon}(c_1 - X)\right) \quad \dots(7)$$

[6].

حيث c_0, c_1 ثوابت اختيارية .

وبتعويض المعادلة (4) في المعادلة (5) نحصل على

$$-ickAe^{ik(X-cT)} = -\varepsilon k^2 Ae^{ik(X-cT)} - LA^2 ike^{2ik(X-cT)}$$

$$\Rightarrow -ic = -\varepsilon k - iLAe^{ik(X-cT)}$$

$$\Rightarrow -ic_1 + c_2 = -\varepsilon k - iLAe^{ik(X-cT)}$$

$$c_1 = LAe^{ik(X-cT)}$$

$$c_2 = -\varepsilon k$$

وبما أن ε, k موجبة دائماً فإن $c_2 < 0$ وبذلك فإن النظام في هذه الحالة يكون مستقر دائماً تحت أي ظروف .

4-2- تحليل الاستقرار في حالة السعة متغيرة :

سوف يتم في هذا الجزء دراسة الاستقرار تحليلياً ثم باستخدام طريقة Galerkin العددية.

4-2-1- تحليل الاستقرار باستخدام الحل التحليلي:

في حالة السعة متغيرة فإن المعادلة (4) تتحول إلى.

$$u_2(X, T) = A(X)e^{ik(X-cT)} \quad \dots(8)$$

[10].

وبتعويض المعادلة (8) في المعادلة (5) ينتج :

$$ickA(X)e^{ik(X-cT)} = \varepsilon A''(X)e^{ik(X-cT)} + 2i\varepsilon kA'(X)e^{ik(X-cT)} - \varepsilon k^2 A(X)e^{ik(X-cT)} \\ + Li k A(X)^2 e^{2ik(X-cT)} + LA(X)A'(X)e^{2ik(X-cT)}$$

ويإهمال الجزء اللاخطي [10] ينتج:

$$c_2 k A(X) = \varepsilon A''(X) - \varepsilon k^2 A(X)$$

$$\Rightarrow A''(X) - \left(\frac{(c_2 + \varepsilon)k}{\varepsilon}\right)A(X) = 0$$

$$\Rightarrow A''(X) - DA(X) = 0 \quad \dots(9)$$

$$D = \frac{(c_2 + \varepsilon)k}{\varepsilon} \quad \text{حيث}$$

ولإيجاد الحل للمعادلة (9) مع الشروط الحدودية في المعادلة (6) هنالك ثلاث حالات [10] :

(i) عندما تكون $D > 0$ فالحل العام هو

$$A(X) = B \cosh \sqrt{-D}X + C \sinh \sqrt{-D}X$$

إذ أن B, C ثوابت اختيارية , ولا تعني الإشارة السالبة هنا أن المقدار $(-D)$ سالب بل هي فقط للملائمة , وباستخدام الشروط الحدودية نحصل على

$$\sqrt{-D}C = 0 \quad \dots(10)$$

$$-\sqrt{-D}B \sinh \sqrt{-D} + \sqrt{-D}C \cosh \sqrt{-D} = 0 \quad \dots(11)$$

وبتعويض المعادلة (10) في المعادلة (11) ينتج

$$-\sqrt{-D}B \sinh \sqrt{-D} = 0$$

$$\Rightarrow B = 0$$

$$C = 0$$

$$A(X) = 0$$

وهو الحل التافه .

(ii) عندما $D = 0$ فان الحل العام للمعادلة (9) هو:

$$A(X) = BX + C$$

وباستخدام الشروط الحدودية

$$A(X) = C$$

(iii) عندما $D < 0$ فان الحل العام للمعادلة (9) هو

$$A(X) = B \cos \sqrt{D}X + C \sin \sqrt{D}X \quad \dots(12)$$

وباستخدام الشروط الحدودية

$$C\sqrt{D} = 0 \quad \dots(13)$$

$$-B\sqrt{D} \sin \sqrt{D} + C\sqrt{D} \cos \sqrt{D} \quad \dots(14)$$

وبتعويض (13) في (14) ينتج:

$$-B\sqrt{D} \sin \sqrt{D} = 0$$

ولتحديد قيمة D نفرض أن $B \neq 0$ إذا

$$\sqrt{D} \sin \sqrt{D} = 0$$

$$\Rightarrow \sin \sqrt{D} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = n\pi$$

$$\Rightarrow D = (n\pi)^2$$

نعوض عن D في المعادلة (12) ينتج :

$$A(X) = B \cos(n\pi)X$$

ولكن

$$D = \frac{(c_2 + \varepsilon)k}{\varepsilon}$$

إذا

$$\frac{(c_2 + \varepsilon)k}{\varepsilon} = (n\pi)^2$$

$$\Rightarrow c_2 k + \varepsilon k = \varepsilon (n\pi)^2$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{\varepsilon (n\pi)^2 - \varepsilon k}{k} \quad \dots(15)$$

للمعادلة (15) الحالات الثلاثة الآتية :

(i) إذا كانت $\varepsilon (n\pi)^2 > \varepsilon k$ فإن $c_2 > 0$ والحل غير مستقر في هذه الحالة.

(ii) إما إذا كانت $\varepsilon (n\pi)^2 < \varepsilon k$ فإن $c_2 < 0$ والحل مستقر في هذه الحالة .

(iii) أما إذا كانت $\varepsilon (n\pi)^2 = \varepsilon k$ فإن $c_2 = 0$ وللحصول على منحنى الاستقرارية نأخذ اقل قيمة ذاتية عندما $n = 1$ فإن

$$k = \pi^2 = 9.869604401$$

4-2-2- تحليل الاستقرارية باستخدام طريقة Galerkin :

تتنمي طريقة Galerkin العددية إلى طرائق المتبقيات الموزونة (The Methods Weighted Residual) التي تعتمد على فرض حل معين للمسألة وبما أن هذا الحل ليس الحل المضبوط بل هو تقريب للحل المضبوط فعند تعويضه في المعادلة المطلوب حلها بعد مساواتها

بالصفر ينتج ما يعرف بالخطأ . بعد ذلك يضرب الخطأ بدالة موزونة ثم يوجد التكامل المحدد بالشروط الحدودية لهذا المقدار وبعد وضع هذا التكامل مساوياً للصفر ينتج ما يسمى بالمتبقي R (Residual) [1] .

نفرض أن الحل للمعادلة (9) على الشكل التالي :

$$A(X) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n X + C_n \sin \lambda_n X) \quad \dots(16)$$

بأخذ احد حدود الحل

$$A(X) = B_n \cos \lambda_n X + C_n \sin \lambda_n X$$

وباستخدام الشروط الحدودية

$$\lambda_n C_n = 0 \quad \dots(17)$$

$$-\lambda_n B_n \sin \lambda_n + \lambda_n C_n \cos \lambda_n = 0 \quad \dots(18)$$

وبتعويض المعادلة (17) في (18) ينتج :

$$-\lambda_n B_n \sin \lambda_n = 0$$

ولتحديد قيمة λ_n نفرض أن $B_n \neq 0$ في أعلاه وهذا يؤدي إلى أن

$$-\lambda_n \sin \lambda_n = 0$$

$$\Rightarrow \sin \lambda_n = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_n = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

من (17) نحصل على $C_n = 0$

وبالتعويض عن λ_n و C_n في المعادلة (16) نحصل على:

$$A(X) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos n\pi X) \quad \dots(19)$$

وبتعويض المعادلة (19) في المعادلة (9) ينتج:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-(n\pi)^2 B_n \cos n\pi X) - D \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos n\pi X) = 0$$

وحسب طريقة Galerkin فان التقريب هنا لا يساوي صفر بل هو نسبة خطأ (Error) والذي يطلق عليه المتبقي R (Residual) أي أن

$$\sum_{n=1}^P (-(n\pi)^2 B_n \cos n\pi X) - D \sum_{n=1}^P (B_n \cos n\pi X) = R$$

وباستخدام فرضية Galerkin نسعى لجعل الخطأ R اقل ما يمكن وان التكامل المحدد للمتبقي السابق مضروباً بدالة يكون مساوياً للصفر

$$\int_{-1}^1 \left[\sum_{n=1}^P (-(n\pi)^2 B_n \cos n\pi X) - D \sum_{n=1}^P (B_n \cos n\pi X) \right] \varphi_m(X) dX = 0$$

حيث أن

$$m = 1, 2, 3, \dots \varphi_m(X) = \cos \lambda_m X \quad \lambda_m = m\pi$$

أن أي عنصر في المصفوفة سوف يكون على الشكل الآتي [2]

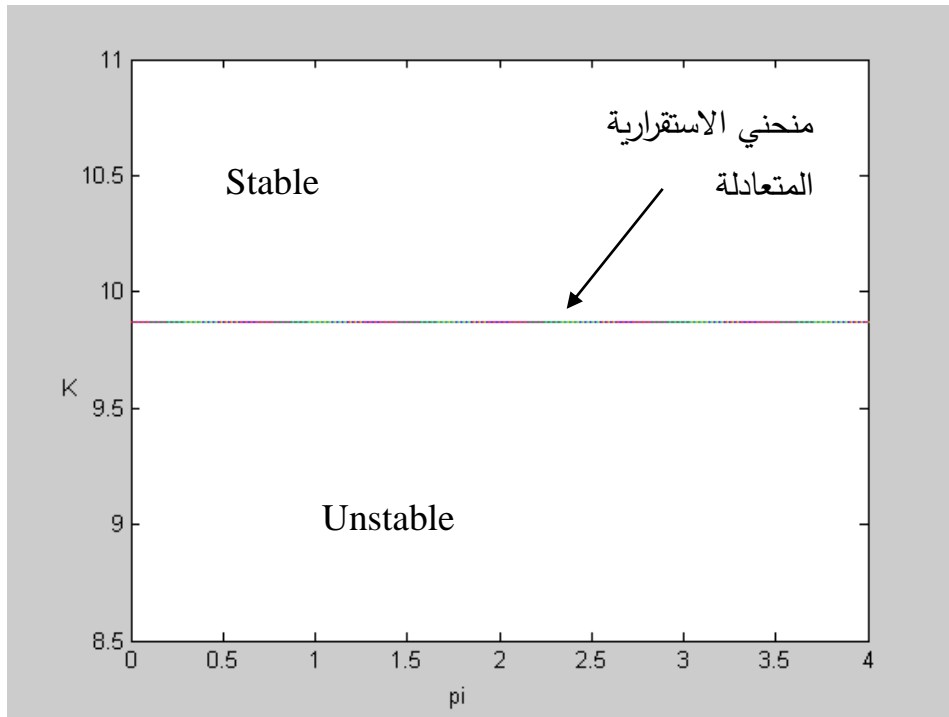
$$X(n, m) = \int_{-1}^1 \sum_{n=1}^P \sum_{m=1}^P -B_n \left[(n\pi)^2 - D \right] \cos n\pi X \cos m\pi X dX \quad \dots(20)$$

ولحساب قيمة C_2 من المعادلة (20)

$$(n\pi)^2 - \frac{c_2 k + \varepsilon k}{\varepsilon} = 0$$

$$c_2 = \frac{\varepsilon(n\pi)^2 - \varepsilon k}{k} \quad \dots(21)$$

نلاحظ أن المعادلة (21) هي نفسها المعادلة (15) التي تم الحصول عليها بالحل التحليلي أي أن المعادلة (21) سوف تعطي النتائج نفسها التي تم الحصول عليها باستخدام المعادلة (15) وهذا يدل على كفاءة ودقة طريقة Galerkin .



شكل (1) يمثل مناطق الاستقرارية ومنحني الاستقرارية المتعادلة للمعادلة (15)

المصادر

- [1] Allaire P.E. Basics of The Finite Element Method ,Wm. C. Brown Publishers (1985).
- [2] Ai-Obaidi, M.F. and Abraham, B.M. Stability Analysis and Chaos in a Bend Duct, Raf. J. Sci., Vol. 12, No. 1, pp. 91-99 (2001).
- [3] Atoull J.A& King, B.B. Stabilized Finite Element Methods and Feed back control for Burger Equation American control conference, 25-31.(2000)
- [4] Benuey, D. J. and Chow, K., Instability of Waves on a Free Surface, Studies in Applied Mathematics, Vol. Lxxiv, No. 3, pp. 227-243 (1986).
- [5] Busse, F.H., and Clever, R.M. Higher Order Bifurcations in Fluid Systems and Coherent Structures in Turbulence Non Linear Coherent Structures in Physics and Biology. PP. 405-415. (1994).
- [6] Edward Allen, and John Burns The Impact of Finite Precision Arithmetic and Sensitivity on the Numerical Solution of Partial Differential Equation (2000)
- [7] Fortunato, M., Kurizki, G. and Schleich W.P., Stabilization of Deterministically Chaotic Systems by Interference and Quantum Measurements The Ikeda Map Case Physical Review Letters , Vol. 80, No.26,PP 5730-5733 (1998)
- [8] Howes, F.A. The Response of Turbulent Boundary Layer to a small Amplitude Travelling Wave , Mathematical and Computer Modelling, Vol. 13, No. 1,pp. 27-31. (1990).
- [9] Leonenko. N.N.& Meluikovn, Renarmahzation & Homogenization of the solutions of heat equation with linear Potential and related Burgers equation with random data Theory probe & Math. Statistics, 1,27-64. (2001)
- [10] Logan J. D. Applied Mathematics Wiley and Sony (1987)
- [11] Shiragami , V., and Inane , I., Fully Developed and Developing Laminar Velocity Profiles in Rectangular Bend, Int of Engineering Fluid Mechanics, Vol. 1. pp. 100-133 (1988).
- [12] Zhaug D.S., Wei G.W., Kouri D. J. & Hoffman Q.K., Burger's Equation with High Reynolds Number J. Phys. Fluid 9(6), pp. 1853 – 1855. (1997).