

**Numerical Solution of Electromagnetic Problem MHD in a Polar Coordinates***Ahmed M.J. Jassim**ahmed.m.j.jassim@uomosul.edu.iq**Ahmed S.J. Amen**ahmedsalar@ntu.edu.iq**Department of Mathematics**College of Computer Sciences & Mathematics**University of Mosul, Mosul, Iraq***Received on: 23/09/2013****Accepted on: 12/02/2014****ABSTRACT**

In this paper, we studied a flow of fluid in a pipe under the effect of electromagnetic field in a polar coordinate, be done build a mathematical model which represented by system of two dimensional non-linear partial differential equations and we solved it by using Alternating Directions Implicit method (ADI) which is one of the finite differences method, and from the numerical solution indicated the behavior of temperature distribution inside the pipe, be done explication the influence of Rayleigh number and Prandtl number as well as the influence of Eckert number upon the behavior of temperature distribution are also done through the energy equation in polar coordinate, we arrived to steady state from unsteady state, we find the behavior of fluid flow inside the pipe and also we studied the influence of Hartmann number upon the behavior of fluid flow in pipe and all this done through the motion equation in polar coordinate.

**Keywords:** Numerical Solution, Polar Coordinates, MHD Problem.

الحل العددي لمسألة كهرومغناطيسية (MHD) في الإحداثيات القطبية

أحمد سالار جلال

أحمد محمد جمعة

قسم الرياضيات، كلية علوم الحاسوب والرياضيات

جامعة الموصل، الموصل، العراق

تاريخ قبول البحث: ٢٠١٤/٠٢/١٢

تاريخ استلام البحث: ٢٠١٣/٠٩/٢٣

**المخلص**

في هذا البحث درسنا جريان مائع في أنبوب تحت تأثير مجال كهرومغناطيسي في إحداثيات قطبية، بني أنموذج رياضي ممثلاً بنظام من المعادلات تفاضلية جزئية غير خطية ذات بعدين وحل هذا النظام باستخدام طريقة الاتجاهات المتعاقبة الضمنية (ADI)، وهي إحدى طرائق الفروقات المنتهية، وبعد أن حصلنا على الحل العددي قمنا بتوضيح سلوك توزيع درجات الحرارة داخل الأنبوب، وصحح تأثير كل من عدد رايلي وعدد براندل وتأثير عدد ايكرت على سلوك توزيع درجات الحرارة وكل هذا تم بمعادلة الطاقة في الإحداثيات القطبية، وتم الوصول إلى حالة غير معتمدة على الزمن (Steady State) من حالة معتمدة على الزمن (Unsteady State)، وأوجدنا سلوك جريان المائع داخل الأنبوب، وكذلك درسنا تأثير عدد هارتمان على سلوك جريان المائع في الأنبوب، وكل هذا تم بمعادلة الحركة في الإحداثيات القطبية.

**الكلمات المفتاحية:** الحل العددي، إحداثيات قطبية، مسألة كهرومغناطيسية.

## 1- المقدمة:

يعد موضوع حركة الموائع الممغنطة (MHD) (Magnetohydrodynamics) أحد الفروع المهمة لميكانيك الموائع الذي يهتم بدراسة التفاعل الذي يجري بين سوائل وحقول كهرومغناطيسية عندما يتحرك السائل في مجال الحقل الكهربائي - المغناطيسي وتدرجياً التيار يتفاعل بالحقل المغناطيسي لإنتاج قوة الجسم على السائل مثل هذه التفاعلات تحدث في الطبيعة وفي مجالات الصناعية، وكذلك MHD تحدث في الشمس وداخل الأرض وطبقات Ionosphere العليا والفضاء الخارجي [3].

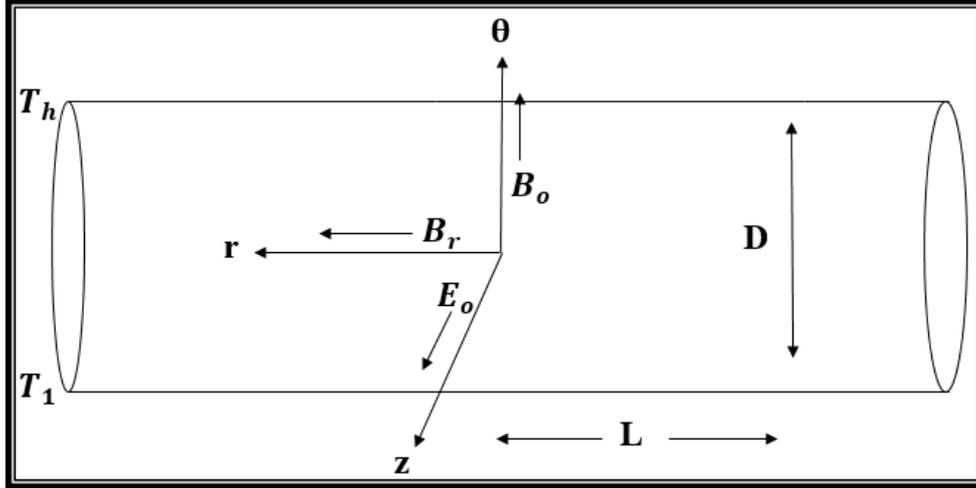
ولذلك فإن هذا الموضوع قد جذب انتباه العديد من العلماء والباحثين، ففي عام 1968 حصل كل من Gardner و Lykoudis مختبرياً على بعض النتائج المتعلقة بقناة مستديرة مع انتقال الحرارة وبدون انتقال الحرارة [7]. وفي عام 1999 درس Davidson ضبط الجريان الكهرومغناطيسي لفولاذ [2] وبعد ذلك قدم كل من Zhang و Thomas في عام 2001 دراسة في المجال نفسه [11] وأيضاً قدم Von Ammon دراسة في المجال نفسه عام 2005، ولكن على نمو بلورات السيليكون كبيرة [12]، وفي العام 2001 أيضاً قدم كل من Lee و Choi بحثاً وضحا فيه أنّ الحقل المغناطيسي يمكن أن يؤدي إلى تخفيف كبير من عائق (موجود في قناة) أثناء الجريان في قناة [6] كما أن كلاً من Nur Hosian و Md. Mastafa و Abdullah قدموا دراسة لمسألة جريان صفائحي حر بالحمل الحراري لمائع ممغنط (MHD) في أسطوانة أفقية [9]. وكذلك Ramamurthy أظهر توزيع السرعة والحقل المغناطيسي لمائع لزج غير مضغوط بين إدارة محورية لأسطوانة تحت تأثير حقل مغناطيسي إشعاعي، حقق Singh في حركة مندفعة لسائل لزج بين مركزي أسطوانتين بوجود حقل مغناطيسي إشعاعي، فحص Borkakati الجريان الثابت لمائع غير مضغوط موصل كهربائياً بين محوري أسطوانتين بوجود حقل مغناطيسي إشعاعي [5]. Farouk و Guceru حققا في الجريان الطبيعي لأسطوانة أفقية، درس Merkin الجريان الطباقى حر انتقال للأسطوانة الدائرية المتساوية في درجة الحرارة.

بين Whereas Ishak الحل العددي لجريان MHD و الانتقال الحراري خارج امتداد أسطوانة [10]، قام كل من Sparrow و Katukani و Kumar و Watanabe بإلحاق مسألة جريان قرب قرص دائر إلى علم قوة الموائع (Hydrodynamic)، و درسوا جريان MHD قرب قرص دائر، درس Ariel تحليل الحاسوبي لجريان MHD قرب قرص دائر [1]، حل Gold عددياً مسألة MHD في أنبوب مستدير ذي جدارين عازلين، Gardner و Lo حاولا حل مسألة جريان في أنبوب دائري مع تحليل كلٍ من حمل الحراري وحمل الحراري الإجمالي واستخدما تقانة التشوش؛ إنَّ الحلول تولده في معكوس القوى لعدد Lykoudis، وكذلك أظهرت توزيع دالة الجريان وسرعة سمتي (azimuthal) لبعض أعداد هارتمان التي تكون صغيرة [7]. وفي البحث الحالي درس مائع ممغنط في أنبوب أفقي معرض إلى مجال كهرومغناطيسي متعامد مع المحور الأفقي للأنبوب، فقد حولت المعادلات التي تتحكم في المسألة إلى الإحداثيات القطبية وحلت عددياً بالاستخدام طريقة الاتجاهات المتعاقبة ضمناً (ADI).

## 2- الأنموذج الرياضي:

نقوم بدراسة جريان مائع موصل للكهربائية داخل أنبوب أفقي بعد تسليط مجال كهرومغناطيسي ثابت على المائع. فيتحول المائع إلى مائع ممغنط؛ إذ نفرض أن درجة الحرارة عند الجدارين الأفقيين تكون ثابتة، بحيث  $T_1$  تمثل درجة الحرارة عند الجدار الأفقي السفلي و  $T_H$  تمثل درجة الحرارة عند الجدار الأفقي

العلوي وتكون  $T_H > T_1$  . و  $D$  تمثل قطر الأنبوب و  $L$  تمثل طول الأنبوب، وأن أنبوب يكون أفقياً وهذا يعني أنه لا توجد لدينا زاوية أي: إن  $\theta=0$  ، عندما نسلط مجالاً كهرومغناطيسياً عمودياً على الأنبوب يطبق قاعدة الكف الأيمن عليه وكما يأتي: المجال الكهرومغناطيسي العمودي المسلط يمثل المحور  $\theta$ ، وبعد تسليط المجال الكهرومغناطيسي يتكون مائع ممغنط يجري باتجاه محور  $r$  وكذلك يتكون مجال كهرومغناطيسي مضاد باتجاه محور  $z$ ؛ إذ يكون مقداره صغيراً جداً يمكن إهماله. كما موضح في الشكل (1):



الشكل رقم (1)

### 3- المعادلات التي تتحكم بالمسألة بالصيغة البعدية في الإحداثيات القطبية:

إن المعادلات المتحكم بالمسألة بالصيغة البعدية هي:

$$\frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} + \frac{v_r^*}{r^*} + \frac{\partial v_\theta^*}{r^* \partial \theta^*} = 0 \quad \dots (1)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v_r^*}{\partial t^*} + v_r^* \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} + \frac{v_\theta^*}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta^*} - \frac{(v_\theta^*)^2}{r^*} \right] = - \frac{\partial p}{\partial r^*} + \mu \left[ \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial v_r^*}{r^* \partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial \theta^{*2}} - \frac{v_r^*}{r^{*2}} - \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta^*} \right] + \sigma E_0 B_0 + \sigma B_0 E_0 v_r^* - B_r B_0 v_\theta^* \quad \dots (2)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v_\theta^*}{\partial t^*} + v_r^* \frac{\partial v_\theta^*}{\partial r^*} + \frac{v_r^* v_\theta^*}{r^*} + \frac{v_\theta^*}{r^*} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta^*} \right] = - \frac{\partial p}{r^* \partial \theta^*} + \mu \left[ \frac{\partial^2 v_\theta^*}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial v_\theta^*}{r^* \partial r^*} + \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta^*} - \frac{v_\theta^*}{r^{*2}} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 v_\theta^*}{\partial \theta^{*2}} \right] - \rho g \beta (T - T_0) - \sigma B_r E_0 - \sigma B_r B_0 v_r^* + \sigma B_r^2 v_\theta^* \quad \dots (3)$$

$$\left[ \frac{\partial T}{\partial t^*} + v_r^* \frac{\partial T}{\partial r^*} + \frac{v_\theta^*}{r^*} \frac{\partial T}{\partial \theta^*} \right] = \frac{k}{\rho c_p} \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial T}{r^* \partial r^*} + \frac{\partial^2 T}{r^{*2} \partial \theta^{*2}} \right] + 2 \epsilon \left[ \left( \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_\theta^*}{r^* \partial \theta^*} + \frac{v_r^*}{r^*} \right)^2 \right] \quad \dots (4)$$

نقوم بدمج المعادلتين (2) و (3) باستخدام عمليات رياضية وعليه تصبح معادلة الحركة على النحو الآتي:

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \left[ \frac{\partial v_\theta^*}{\partial r^*} - \frac{\partial v_r^*}{r^* \partial \theta^*} \right] - \frac{\partial v_r^*}{r^* \partial \theta^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} + v_r^* \frac{\partial^2 v_\theta^*}{\partial r^{*2}} - \frac{v_r^*}{r^*} \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial \theta^* \partial r^*} + \frac{v_\theta^*}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} - \frac{v_\theta^*}{r^{*2}} \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial \theta^{*2}} - \frac{\partial v_r^*}{r^{*2} \partial \theta^*} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta^*} + \frac{v_\theta^*}{r^*} \frac{\partial^2 v_\theta^*}{\partial \theta^* \partial r^*} - \frac{\partial (v_\theta^*)^2}{r^{*2} \partial \theta^*} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \left[ \frac{\partial v_\theta^*}{\partial r^*} - \frac{\partial v_r^*}{r^* \partial \theta^*} \right] - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial v_\theta^*}{r^{*2} \partial r^*} + \frac{\mu}{\rho} \frac{2 \partial^2 v_r^*}{r^{*2} \partial \theta^* \partial r^*} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial v_r^*}{r^{*3} \partial \theta^*} + \frac{\mu}{\rho} \frac{2 \partial^2 v_\theta^*}{r^{*2} \partial \theta^{*2}} - g \beta \frac{\partial T}{\partial r^*} + \frac{\sigma B_r B_0}{\rho} \left[ - \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} + \frac{\partial v_\theta^*}{r^* \partial \theta^*} \right] + \frac{\sigma B_r^2}{\rho} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial r^*} - \frac{\Sigma E_0 B_0}{\rho} \frac{\partial v_r^*}{r^* \partial \theta^*} \quad \dots (5)$$

إذ إنَّ  $V_R^*$  و  $V_\theta^*$  هي مركبات سرعة،  $T^*$  هي الزمن و  $\rho$ ،  $P$ ،  $G$ ،  $T$ ،  $T_0$ ،  $M$ ،  $B$  على التوالي هي الكثافة، الضغط، التعجيل، درجة الحرارة المطلقة، درجة الحرارة الابتدائية، اللزوجة، معامل التمدد الحراري و  $B$  على التوالي هي متجه الحقل المغناطيسي، متجه الحقل الكهربائي، معامل التوصيل الحراري، الحرارة النوعية، معلمة التشنت، اللزوجة الكينماتية. مع الشروط الحدودية الآتية:

أ- الشروط الحدودية للحرارة

تكون الشروط الحدودية للحرارة عند الجدارين العلوي والسفلي وعلى النحو الآتي :

$$T \left( r^* = L, \theta = \frac{\pi}{2} \right) = T_h$$

$$T \left( r^* = L, \theta = \frac{3\pi}{2} \right) = T_1$$

إذ إن  $\theta = \frac{\pi}{2}$  و  $\theta = \frac{3\pi}{2}$  لا نعني بها ميلان الأنبوب وإنما نعني بها الجدار العلوي والجدار السفلي على التوالي .

ب- الشروط الحدودية للسرعة

$$v_r^* \left( r^*, \theta^* = \frac{\pi}{2} \right) = v_\theta^* \left( r^*, \theta^* = \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$v_r^* \left( r^*, \theta^* = \frac{3\pi}{2} \right) = v_\theta^* \left( r^*, \theta^* = \frac{3\pi}{2} \right) = 0$$

$$v_r^*(r^* = L, \theta^*) = v_\theta^*(r^* = L, \theta^*) = 0$$

4- الصيغة اللابعديّة للمعادلات المتحكمّة في الإحداثيات القطبية:

لحل المعادلات المتحكمّة مع الشروط الحدودية نحتاج لتحويل المعادلات المتحكمّة إلى الصيغ اللابعديّة

[13] .

$$u = \frac{u^*}{U} \Rightarrow \partial u^* = U \partial u$$

$$v = \frac{v^*}{U} \Rightarrow \partial v^* = U \partial v$$

$$U = \frac{\alpha}{L} \sqrt{Ra Pr} = \sqrt{g \beta \Delta T L}$$

$$x = \frac{x^*}{L} \Rightarrow \partial x^* = L \partial x$$

$$y = \frac{y^*}{L} \Rightarrow \partial y^* = L \partial y$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_h - T_0} \Rightarrow \partial T = \partial \theta \Delta T$$

$$t = \frac{U t^*}{L} \Rightarrow \partial t^* = \frac{L}{U} \partial t$$

$$Ra = \frac{\rho g \beta (T_h - T_0) L^3}{\mu \alpha}$$

$$Pr = \frac{U}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{k}$$

$$Ec = \frac{U^2}{c_p \Delta T}$$

$$Ha = B_0 L \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$$

إذ إنَّ:

$Ra$  هو عدد راييلي

$Pr$  هو عدد براندل

$Ec$  هو عدد ايكرت [4]

$Ha$  هو عدد هارتمان

نعوض المقادير أعلاه في المعادلات (1)،(4)،(5) نحصل على:

$$\frac{U \partial v_r}{L \partial R} + \frac{U \partial v_\theta}{L^2 r \partial \theta} + \frac{U v_r}{L r} = 0 \quad \dots (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{U \partial v_\theta}{L \partial R} - \frac{U \partial v_r}{r L^2 \partial \theta} \right] - \frac{U \partial v_r}{L^2 R \partial \theta} \frac{U \partial v_r}{L \partial R} + U v_r \frac{U \partial^2 v_\theta}{L^2 \partial r^2} - \frac{U v_r}{L r} \frac{U \partial^2 v_r}{L^2 \partial \theta \partial r} + \frac{U v_\theta}{L r} \frac{U \partial v_r}{L \partial r} - \\ & \frac{U v_\theta}{L^2 r^2} \frac{U \partial^2 v_r}{L^2 \partial \theta^2} - \frac{U \partial v_r}{r^2 L^2 L \partial \theta} \frac{U \partial v_\theta}{L \partial \theta} + \frac{U v_\theta}{L r} \frac{U \partial^2 v_\theta}{L^2 \partial r \partial \theta} - \frac{U^2 \partial v_\theta^2}{L^3 r^2 \partial \theta} = \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{\partial^2}{L^2 \partial r^2} + \frac{\partial}{L^2 r \partial r} + \right. \\ & \left. \frac{\partial^2}{L^2 r^2 L^2 \partial \theta^2} \right] \left[ \frac{U \partial v_\theta}{L \partial r} - \frac{U \partial v_r}{L^2 r \partial \theta} \right] - \frac{\mu}{\rho} \frac{U \partial v_\theta}{L^3 r^2 \partial r} + \frac{\mu}{\rho} \frac{2 U \partial^2 v_r}{L^2 R^2 L^2 \partial R \partial \theta} + \frac{\mu}{\rho} \frac{U \partial v_r}{L^3 r^3 L \partial \theta} + \\ & \frac{\mu}{\rho} \frac{2 U \partial^2 v_\theta}{L^3 r^3 L^2 \partial \theta^2} - g \beta \frac{\Delta T \partial w}{L \partial r} + \frac{\sigma B_r B_\theta}{\rho} \left[ \frac{U \partial v_\theta}{L^2 r \partial \theta} - \frac{U \partial v_r}{L \partial r} \right] + \frac{\sigma B_r^2}{\rho} \frac{U \partial v_\theta}{L \partial R} - \frac{\sigma E_\theta B_\theta}{\rho} \frac{\partial v_r}{L^2 r \partial \theta} \end{aligned}$$

... (7)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w \Delta T}{\partial T \frac{L}{U}} + U v_r \frac{\partial w \Delta T}{L \partial r} + \frac{U v_\theta}{L r} \frac{\partial w \Delta T}{L \partial \theta} = \frac{K}{P C_p} \left[ \frac{\partial^2 w \Delta T}{\partial R^2 L^2} + \frac{\Delta T \partial w}{L^2 r \partial r} + \frac{\Delta T \partial^2 w}{L^2 r^2 L^2 \partial \theta^2} \right] + 2 \in \\ & \left[ \left( \frac{U \partial v_r}{L r L \partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{U \partial v_\theta}{L \partial r} + \frac{U v_\theta}{L r} \right)^2 \right] \dots (8) \end{aligned}$$

بعد تبسيط المعادلات أعلاه نحصل على:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{L r \partial \theta} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad \dots (9)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial \Omega}{r \partial r} \right] - \frac{\partial w}{\partial r} + Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \Omega \quad \dots (10)$$

إذ إن:  $I = \frac{E_\theta}{B_\theta}$  هو معامل الحث

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial w}{\partial T} + v_r \frac{\partial w}{\partial r} + A_1 v_\theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{\sqrt{Ra Pr}} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial R^2} + A_2 \frac{\partial w}{\partial r} + A_3 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] + \\ & \frac{2 Ec Pr}{\sqrt{Ra Pr}} \left[ \left( A_1 \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + A_2 v_\theta \right)^2 \right] \dots (11) \end{aligned}$$

إذ إن:

$$\begin{aligned} & A_1 = \frac{1}{L r}, \quad A_2 = \frac{1}{r}, \quad A_3 = \frac{1}{L^2 r^2}, \quad A_4 = \frac{1}{r^2}, \quad A_5 = \frac{1}{L} \\ & A_6 = \frac{1}{r^3}, \quad A_7 = \frac{1}{L r^2}, \quad A_8 = \frac{1}{L r^3}, \quad A_9 = \frac{1}{L^2 r^3} \end{aligned}$$

إذ إن المعادلات (9)، (10)، (11) هي معادلات المتحكم بالمسألة بالصيغة اللابعدية في الإحداثيات القطبية.

### 5- طريقة الاتجاهات المتعاقبة الضمنية (ADI) لحل المسألة:

نقوم بحل المعادلات بطريقة الاتجاهات المتعاقبة الضمنية (ADI) الملائمة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية القطبية المكافئة (Parabolic Partial Differential Equations) وتتميز هذه الطريقة بمميزات عديدة جعلتها من الطرائق المفضلة وذات كفاءة عالية [8] لإيجاد الحل التقريبي لمسألتنا والصيغة العامة لطريقة الاتجاهات المتعاقبة ضمناً هي:

$$1 - \frac{\theta_{i,j}^* - \theta_{i,j,n}}{\frac{\Delta t}{2}} = (\delta_x^2 \theta_{i,j}^* + \delta_y^2 \theta_{i,j,n})$$

$$2 - \frac{\theta_{i,j,n+1} - \theta_{i,j}^*}{\frac{\Delta t}{2}} = (\delta_x^2 \theta_{i,j}^* + \delta_y^2 \theta_{i,j,n+1})$$

إذ إنَّ:

$$\theta_{i,j}^* = \theta_{i,j, \left(\frac{n+1}{2}\right)}, \quad \delta_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \delta_y^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

إذ نقوم بحل معادلة الطاقة (11) وبعدها نحل معادلة الحركة (10) وعلى النحو الآتي:

أ- حل معادلة الطاقة (11):

1- باتجاه محور r:

$$\frac{w_{i,j}^* - w_{i,j,n}}{\frac{\Delta t}{2}} + (v_r)_{i,j,n} \frac{w_{i+1,j}^* - w_{i-1,j}^*}{2(\Delta r)} + A_1 (v_\theta)_{i,j,n} \frac{w_{i,j+1,n} - w_{i,j-1,n}}{2(\Delta \theta)} = \frac{1}{m} \left[ \frac{w_{i+1,j}^* - 2w_{i,j}^* + w_{i-1,j}^*}{(\Delta r)^2} + A_2 \frac{w_{i+1,j}^* - w_{i-1,j}^*}{2(\Delta r)} + A_3 \frac{w_{i,j+1,n} - 2w_{i,j,n} + w_{i,j-1,n}}{(\Delta \theta)^2} \right] + \frac{\Phi}{m} \dots (12)$$

2- باتجاه محور  $\theta$ :

$$\frac{w_{i,j,n+1} - w_{i,j}^*}{\frac{\Delta t}{2}} + (v_r)_{i,j,n} \frac{w_{i+1,j}^* - w_{i-1,j}^*}{2(\Delta r)} + A_1 (v_\theta)_{i,j,n} \frac{w_{i,j+1,n+1} - w_{i,j-1,n+1}}{2(\Delta \theta)} = \frac{1}{m} \left[ \frac{w_{i+1,j}^* - 2w_{i,j}^* + w_{i-1,j}^*}{(\Delta r)^2} + A_2 \frac{w_{i+1,j}^* - w_{i-1,j}^*}{2(\Delta r)} + A_3 \frac{w_{i,j+1,n+1} - 2w_{i,j,n+1} + w_{i,j-1,n+1}}{(\Delta \theta)^2} \right] + \frac{\Phi}{m} \dots (13)$$

بعد تبسيط المعادلتين أعلاه نحصل من معادلة (12) على:

$$-w_{i-1,j}^* + \frac{\left[\frac{2m}{\lambda} + 2\right]}{\left[1 - \frac{h}{2} \frac{A_2}{\lambda} + \frac{hm}{2} (v_r)_{i,j,n}\right]} w_{i,j}^* - \frac{\left[1 + \frac{h}{2} \frac{A_2}{\lambda} - \frac{hm}{2} (v_r)_{i,j,n}\right]}{\left[1 - \frac{h}{2} \frac{A_2}{\lambda} + \frac{hm}{2} (v_r)_{i,j,n}\right]} w_{i+1,j}^* = \frac{\left[A_3 + \frac{h}{2} \frac{A_1 m}{\lambda} (v_\theta)_{i,j,n}\right]}{\left[1 - \frac{h}{2} \frac{A_2}{\lambda} + \frac{hm}{2} (v_r)_{i,j,n}\right]} w_{i,j-1,n} + \frac{\left[\frac{2m}{\lambda} - 2A_3\right]}{\left[1 - \frac{h}{2} \frac{A_2}{\lambda} + \frac{hm}{2} (v_r)_{i,j,n}\right]} w_{i,j,n} + \frac{\left[A_3 - \frac{h}{2} \frac{A_1 m}{\lambda} (v_\theta)_{i,j,n}\right]}{\left[1 - \frac{h}{2} \frac{A_2}{\lambda} + \frac{hm}{2} (v_r)_{i,j,n}\right]} w_{i,j+1,n} + \frac{\Phi h^2}{\left[1 - \frac{h}{2} \frac{A_2}{\lambda} + \frac{hm}{2} (v_r)_{i,j,n}\right]} \dots (14)$$

$i = 1, \dots, N$

إذ إنَّ:

$$A(i) = -1, \quad B(i) = \frac{\left[\frac{2m}{\lambda} + 2\right]}{\left[1 - \frac{h}{2} \frac{A_2}{\lambda} + \frac{hm}{2} (v_r)_{i,j,n}\right]}, \quad C(i) = -\left(\frac{\left[1 + \frac{h}{2} \frac{A_2}{\lambda} - \frac{hm}{2} (v_r)_{i,j,n}\right]}{\left[1 - \frac{h}{2} \frac{A_2}{\lambda} + \frac{hm}{2} (v_r)_{i,j,n}\right]}\right)$$

$$D(i) = \left(\frac{\left[A_3 + \frac{h}{2} \frac{A_1 m}{\lambda} (v_\theta)_{i,j,n}\right]}{\left[1 - \frac{h}{2} \frac{A_2}{\lambda} + \frac{hm}{2} (v_r)_{i,j,n}\right]}\right) w_{i,j-1,n} + \left(\frac{\left[\frac{2m}{\lambda} - 2A_3\right]}{\left[1 - \frac{h}{2} \frac{A_2}{\lambda} + \frac{hm}{2} (v_r)_{i,j,n}\right]}\right) w_{i,j,n} + \left(\frac{\left[A_3 - \frac{h}{2} \frac{A_1 m}{\lambda} (v_\theta)_{i,j,n}\right]}{\left[1 - \frac{h}{2} \frac{A_2}{\lambda} + \frac{hm}{2} (v_r)_{i,j,n}\right]}\right) w_{i,j+1,n} + \frac{\Phi h^2}{\left[1 - \frac{h}{2} \frac{A_2}{\lambda} + \frac{hm}{2} (v_r)_{i,j,n}\right]}$$

ومن معادلة (13) نحصل على:

$$-w_{i,j-1,n+1} + \frac{\left[\frac{2m}{\lambda} + 2\right]}{\left[1 + \frac{hm}{2} \frac{A_1}{\lambda} (v_\theta)_{i,j,n}\right]} w_{i,j,n+1} + \frac{\left[\frac{hm}{2} \frac{A_1}{\lambda} (v_\theta)_{i,j,n} - 1\right]}{\left[1 + \frac{hm}{2} \frac{A_1}{\lambda} (v_\theta)_{i,j,n}\right]} w_{i,j+1,n+1} = \frac{\left[\frac{1}{A_3} - \frac{hm}{2} \frac{A_2}{\lambda} + \frac{hm}{2} \frac{A_1}{\lambda} (v_r)_{i,j,n}\right]}{\left[1 + \frac{hm}{2} \frac{A_1}{\lambda} (v_\theta)_{i,j,n}\right]} w_{i-1,j}^* + \frac{\left[\frac{2m}{\lambda} - \frac{2}{A_3}\right]}{\left[1 + \frac{hm}{2} \frac{A_1}{\lambda} (v_\theta)_{i,j,n}\right]} w_{i,j}^* + \frac{\left[\frac{1}{A_3} + \frac{A_1 h}{2} \frac{hm}{\lambda} (v_r)_{i,j,n}\right]}{\left[1 + \frac{hm}{2} \frac{A_1}{\lambda} (v_\theta)_{i,j,n}\right]} w_{i+1,j}^* + \frac{\frac{\Phi h^2}{A_3}}{\left[1 + \frac{hm}{2} \frac{A_1}{\lambda} (v_\theta)_{i,j,n}\right]} \dots (15)$$

$i = 1, \dots, N$

إذ إنَّ:

$$A_1(i) = -1, \quad B_1(i) = \frac{\left[ \frac{2m}{\lambda A_3} + 2 \right]}{\left[ 1 + \frac{hm A_1}{2 A_3} (v_\theta)_{i,j,n} \right]}, \quad C_1(i) = \frac{\left[ \frac{hm A_1}{2 A_3} (v_\theta)_{i,j,n} - 1 \right]}{\left[ 1 + \frac{hm A_1}{2 A_3} (v_\theta)_{i,j,n} \right]}$$

$$D_1(i) = \left( \frac{\left[ \frac{1}{A_3} - \frac{hm A_2}{2 A_3} + \frac{hm}{2 A_3} (v_r)_{i,j,n} \right]}{\left[ 1 + \frac{hm A_1}{2 A_3} (v_\theta)_{i,j,n} \right]} \right) w_{i-1,j}^* + \left( \frac{\left[ \frac{2m}{\lambda A_3} - \frac{2}{A_3} \right]}{\left[ 1 + \frac{hm A_1}{2 A_3} (v_\theta)_{i,j,n} \right]} \right) w_{i,j}^* +$$

$$\left( \frac{\left[ \frac{1}{A_3} + \frac{A_1 h}{2 A_3} - \frac{hm}{2 A_3} (v_r)_{i,j,n} \right]}{\left[ 1 + \frac{hm A_1}{2 A_3} (v_\theta)_{i,j,n} \right]} \right) w_{i+1,j}^* + \frac{\frac{\phi h^2}{A_3}}{\left[ 1 + \frac{hm A_1}{2 A_3} (v_\theta)_{i,j,n} \right]}$$

وهذا يمثل حل معادلة الطاقة في الإحداثيات القطبية

ب- حل معادلة الحركة (10):

1- باتجاه محور r :

$$\frac{\Omega_{i,j}^* - \Omega_{i,j,n}}{\frac{\Delta t}{2}} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[ \frac{\Omega_{i+1,j}^* - 2\Omega_{i,j}^* + \Omega_{i-1,j}^*}{(\Delta r)^2} + A_4 \frac{\Omega_{i,j+1,n} - 2\Omega_{i,j,n} + \Omega_{i,j-1,n}}{(\Delta \theta)^2} + \right.$$

$$A_2 \frac{\Omega_{i+1,j}^* - \Omega_{i-1,j}^*}{2(\Delta r)} \left. - \frac{w_{i+1,j,n+1} - w_{i-1,j,n+1}}{2(\Delta \theta)} + Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \Omega_{i,j,n} \dots (16) \right.$$

2- باتجاه محور :

$$\frac{\Omega_{i,j,n+1} - \Omega_{i,j}^*}{\frac{\Delta t}{2}} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[ \frac{\Omega_{i+1,j}^* - 2\Omega_{i,j}^* + \Omega_{i-1,j}^*}{(\Delta r)^2} + A_4 \frac{\Omega_{i,j+1,n+1} - 2\Omega_{i,j,n+1} + \Omega_{i,j-1,n+1}}{(\Delta \theta)^2} + \right.$$

$$A_2 \frac{\Omega_{i+1,j}^* - \Omega_{i-1,j}^*}{2(\Delta r)} \left. - \frac{w_{i+1,j,n+1} - w_{i-1,j,n+1}}{2(\Delta r)} + Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \Omega_{i,j,n+1} \dots (17) \right.$$

بعد تبسيط المعادلتين أعلاه نحصل من معادلة (16) على :

$$-\Omega_{i-1,j}^* + \frac{[1 + \lambda \beta]}{\left[ \frac{\lambda \beta}{2} - \frac{\lambda \beta h A_2}{4} \right]} \Omega_{i,j}^* - \frac{\left[ \frac{\lambda \beta}{2} + \frac{\lambda \beta h A_2}{4} \right]}{\left[ \frac{\lambda \beta}{2} - \frac{\lambda \beta h A_2}{4} \right]} \Omega_{i+1,j}^* = \frac{\left[ \frac{\lambda \beta A_4}{2} \right]}{\left[ \frac{\lambda \beta}{2} - \frac{\lambda \beta h A_2}{4} \right]} \Omega_{i,j-1,n} +$$

$$\frac{\left[ 1 + \frac{\lambda \beta h^2}{2} Ha^2 - \lambda \beta A_4 \right]}{\left[ \frac{\lambda \beta}{2} - \frac{\lambda \beta h A_2}{4} \right]} \Omega_{i,j,n} + \frac{\left[ \frac{\lambda \beta A_4}{2} \right]}{\left[ \frac{\lambda \beta}{2} - \frac{\lambda \beta h A_2}{4} \right]} \Omega_{i,j+1,n} - \frac{h}{\beta [2 - 4 A_2 h]} [w_{i+1,j,n+1} -$$

$$w_{i-1,j,n+1}] \dots (18)$$

i = 1, ....., N

إذ إنَّ

$$A(i) = -1, \quad B(i) = \frac{[1 + \lambda \beta]}{\left[ \frac{\lambda \beta}{2} - \frac{\lambda \beta h A_2}{4} \right]}, \quad C(i) = -\frac{\left[ \frac{\lambda \beta}{2} + \frac{\lambda \beta h A_2}{4} \right]}{\left[ \frac{\lambda \beta}{2} - \frac{\lambda \beta h A_2}{4} \right]}$$

$$D(i) = \frac{\left[ \frac{\lambda \beta A_4}{2} \right]}{\left[ \frac{\lambda \beta}{2} - \frac{\lambda \beta h A_2}{4} \right]} \Omega_{i,j-1,n} + \frac{\left[ 1 + \frac{\lambda \beta h^2}{2} Ha^2 - \lambda \beta A_4 \right]}{\left[ \frac{\lambda \beta}{2} - \frac{\lambda \beta h A_2}{4} \right]} \Omega_{i,j,n} +$$

$$\frac{\left[ \frac{\lambda \beta A_4}{2} \right]}{\left[ \frac{\lambda \beta}{2} - \frac{\lambda \beta h A_2}{4} \right]} \Omega_{i,j+1,n} - \frac{h}{\beta [2 - 4 A_2 h]} [w_{i+1,j,n+1} - w_{i-1,j,n+1}]$$

ومن معادلة (17) نحصل على:

$$-\Omega_{i,j-1,n+1} + \frac{[1 + \lambda \beta A_4 - \frac{\beta \lambda h^2}{2} Ha^2]}{\left[ \frac{\lambda \beta A_4}{2} \right]} \Omega_{i,j,n+1} - \Omega_{i,j+1,n+1} = \frac{\left[ \frac{\lambda \beta}{2} - \frac{\lambda \beta h A_2}{4} \right]}{\left[ \frac{\lambda \beta A_4}{2} \right]} \Omega_{i-1,j}^* +$$

$$\frac{[1 - \lambda \beta]}{\left[ \frac{\lambda \beta A_4}{2} \right]} \Omega_{i,j}^* + \frac{\left[ \frac{\lambda \beta}{2} + \frac{\lambda \beta h A_2}{4} \right]}{\left[ \frac{\lambda \beta A_4}{2} \right]} \Omega_{i+1,j}^* - \frac{h}{2 \beta A_4} [w_{i+1,j,n+1} - w_{i-1,j,n+1}] \dots (19)$$

$i = 1, \dots, N$

إذ إن :

$$A_1(i) = -1, B_1(i) = \left( \frac{1 + \lambda \beta A_4 \frac{\beta \lambda h^2}{2} Ha^2}{\left[ \frac{\lambda \beta A_4}{2} \right]} \right), C_1(i) = -1$$

$$D_1(i) = \frac{\left[ \frac{\lambda \beta}{2} - \frac{\lambda \beta h A_2}{4} \right]}{\left[ \frac{\lambda \beta A_4}{2} \right]} \Omega_{i-1,j}^* + \frac{[1 - \lambda \beta]}{\left[ \frac{\lambda \beta A_4}{2} \right]} \Omega_{i,j}^* + \frac{\left[ \frac{\lambda \beta}{2} + \frac{\lambda \beta h A_2}{4} \right]}{\left[ \frac{\lambda \beta A_4}{2} \right]} \Omega_{i+1,j}^* - \frac{h}{2 \beta A_4} [w_{i+1,j,n+1} - w_{i-1,j,n+1}]$$

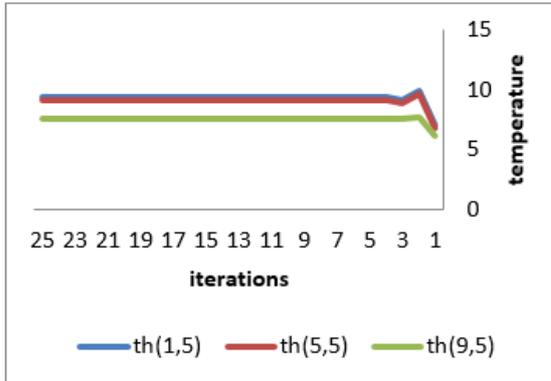
وهذا يمثل حل معادلة الحركة في الإحداثيات القطبية.

نستخدم برنامج الحاسوبي بلغة فورتران للحصول على النتائج العددية التي مثلت برسومات توضيحية في الاستنتاجات.

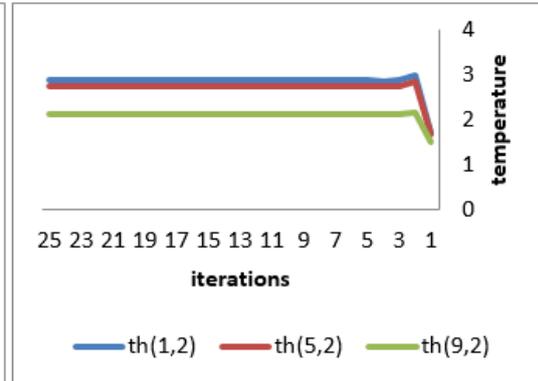
#### 6- الاستنتاجات:

- 1- لقد لوحظ من حل المعادلات للأنموذج باستخدام طريقة ADI في الإحداثيات القطبية بأنه يمكن الحصول على الحل اللازمي STEADY من الحل الزمني UNSTEADY لدالة الحرارة ونقاط مختلفة وهذا واضح من الأشكال (4-أ)، (4-ب)، (4-ج).
- 2- تأثير عدد Ra على دالة الحرارة في الإحداثيات القطبية كان واضحاً؛ إذ تراوحت قيم Ra بين (1.5 - 3) وكما موضح في الأشكال (6-أ)، (6-ب).
- 3- لقد لوحظ بأن تأثير عدد Ec ثابت في الإحداثيات القطبية وتراوحت قيم Ec بين (0.02 - 0.04) كما مبين في الأشكال (8-أ)، (8-ب).
- 4- أما بالنسبة لدالة الحركة في الإحداثيات القطبية تم الوصول من الحل اللازمي Steady إلى الحل الزمني Unsteady ولكن بشكل (نمط) مختلفة عن دالة الحرارة في الإحداثيات القطبية وكما مبين في الأشكال (10-أ)، (10-ب)، (10-ج).
- 5- إن تأثير عدد Pr على دالة الحرارة في الإحداثيات القطبية كان واضحاً كما موضح في الأشكال (12-أ)، (12-ب)؛ إذ إن قيم Pr تراوحت بين (5 - 15).
- 6- إن تأثير عدد Ha على دالة الحركة في الإحداثيات القطبية كان واضحاً كما موضح في الأشكال (14-أ)، (14-ب)؛ إذ إن قيم Pr تراوحت بين (50 - 90).
- 7- إن تأثير نصف قطر الأنبوب r على دالة الحرارة في الإحداثيات القطبية كان أكثر وضوحاً من تأثير نصف قطر الأنبوب r على دالة الحركة في الإحداثيات القطبية كما موضح في الأشكال (15-أ)، (15-ب)، (16-أ)، (16-ب)؛ إذ تراوحت قيم r بين (0.025 - 0.25) عند دالة الحركة في الإحداثيات القطبية وتراوحت قيم r بين (0.19 - 0.25) عند دالة الحرارة في الإحداثيات القطبية.

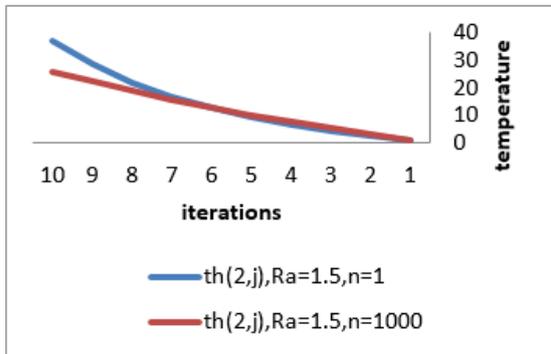
الأشكال التوضيحية:



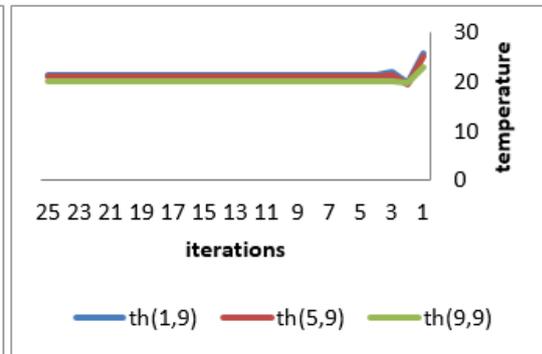
الشكل (4-ب)



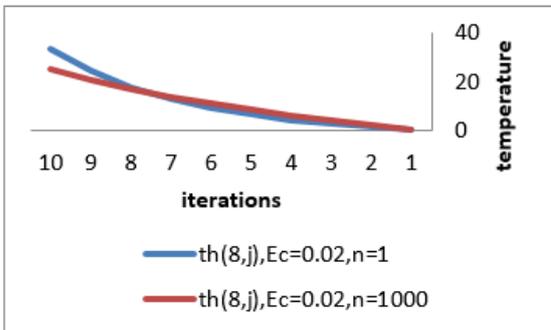
الشكل (4-أ)



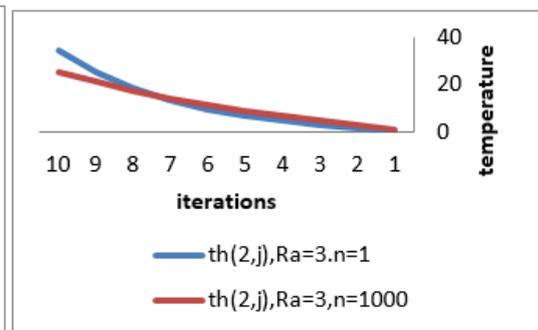
الشكل (6-أ)



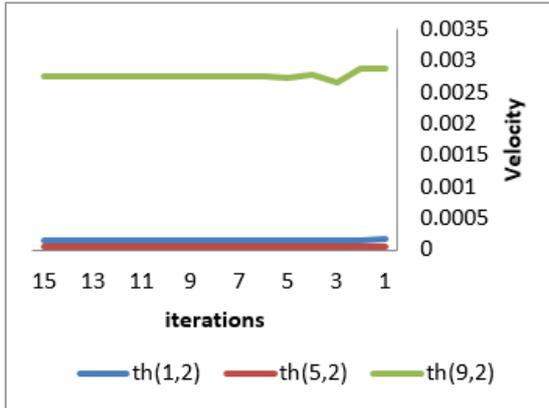
الشكل (4-ج)



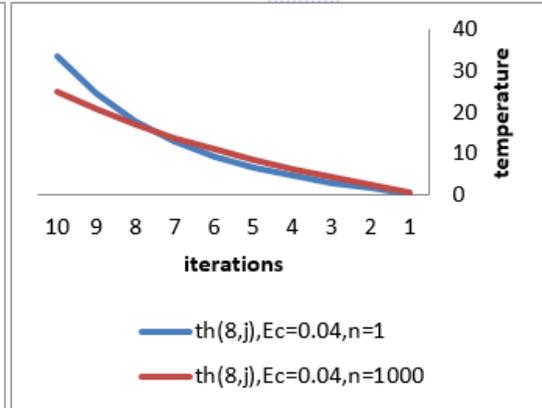
الشكل (8-أ)



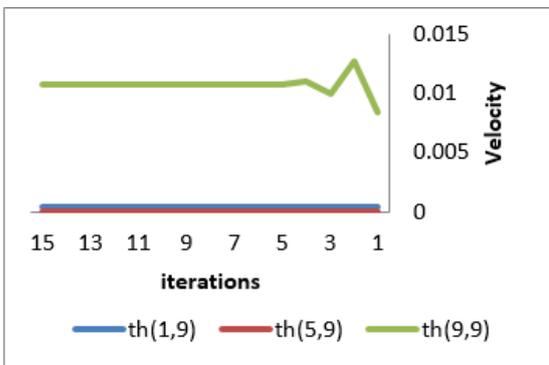
الشكل (6-ب)



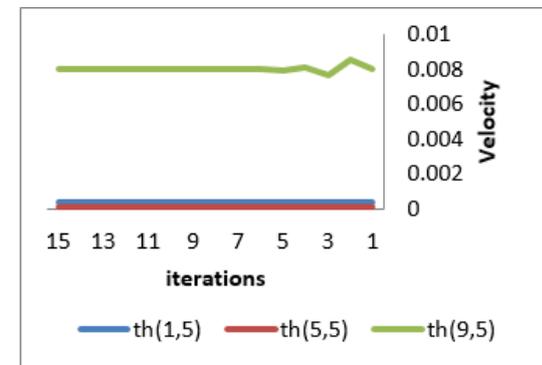
الشكل (10-أ)



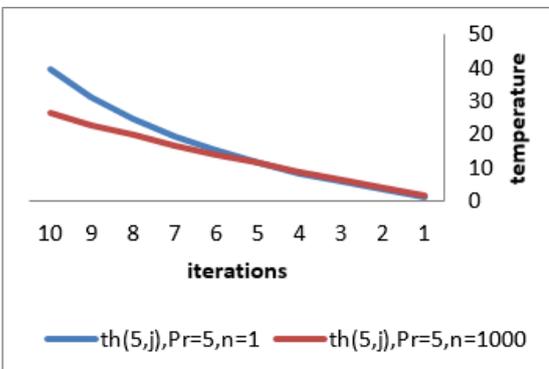
الشكل (8-ب)



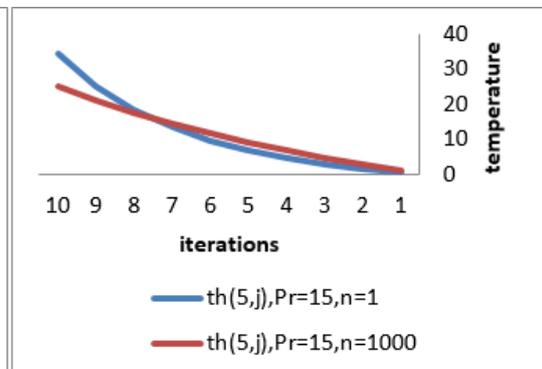
الشكل (10-ج)



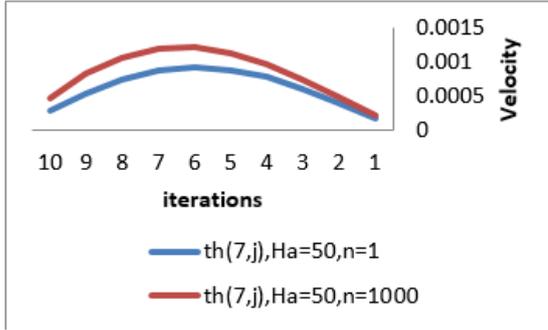
الشكل (10-ب)



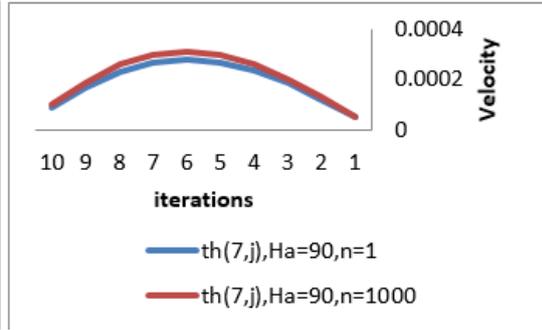
الشكل (12-ب)



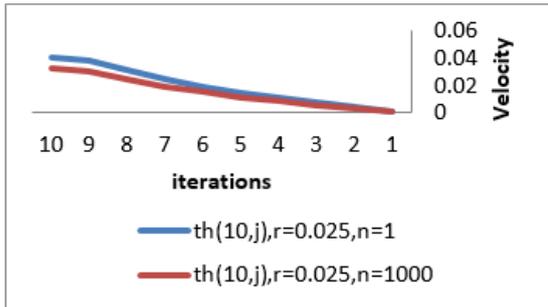
الشكل (12-أ)



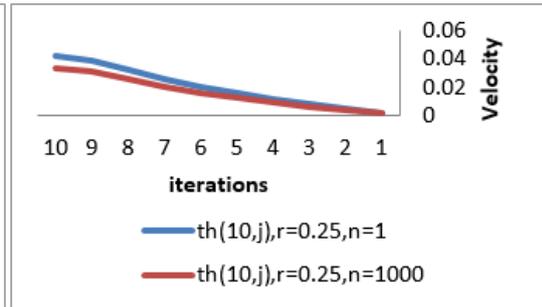
الشكل (14 - ب)



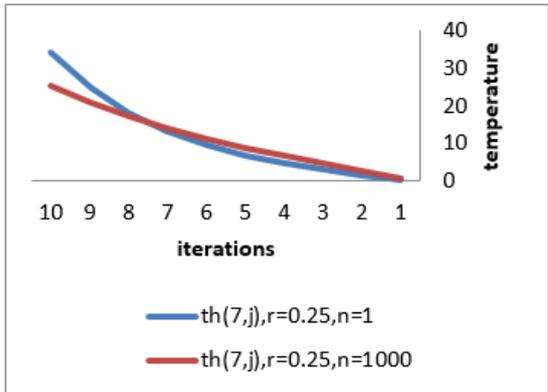
الشكل (14 - أ)



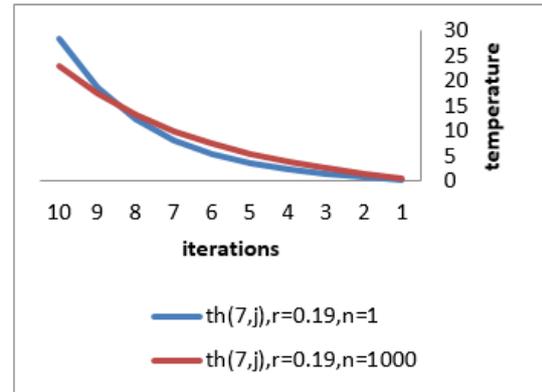
الشكل (15 - ب)



الشكل (15 - أ)



الشكل (16 - ب)



الشكل (16 - أ)

المصادر

- [1] Bhupendra K. S. , Abhay K. JHA , R. C. Chaudhary. , " MHD Forced Flow Of a Conducting Viscous Fluid Through a Porous Medium Induced By an Impervious Rotating Disk". Department of Mathematics, University of Rajasthan 30 Jaipur( 2004) , India , E-Mail: rcchaudhary @ rediffmail . com , Received August 22, (2006) .
- [2] Davidson, P.A. , " Magnetohydrodynamics in materials processing ". Annu.Rev.Fluid Mech.31,273 300 (1999) .
- [3] Hughes , W.F. & Brighton , J.A., "Fluid Dynamics ". Schaum's Outline Series in Engineering , McGraw-Hill Ltd. , USA ( 1967) .
- [4] Jumaa , A.M. , "convection in an inclined fluid layer ". Ph.D. Thesis , University of Pune , India (2001) .
- [5] J.V. Ramana Muthy , G. Nagaraju , K.S. Sai. , " Numerical Solution for MHD Flow of Micro Polar Fluid Between Two Concentric Rotating Cylinders With Porous Lining ". ISSN 1749-3889 (print), 1749-3897 (online), International Journal of Nonlinear Science , Vol.13, No.2,pp.183-193 (2012) .
- [6] Lee, D. & Choi, H. , " Magnetohydrodynamic turbulent flow in a channel at low magnetic Reynolds number ". J. Fluid Mech. 439, 367 394 (2001) .
- [7] Mohammed al-khawaja , Mohamed selmi , "Finite difference solutions of MFM square duct flow with heat transfer using matlab program" . Qatar university , Doha , state of Qatar (2010) .
- [8] Morton, K. W. & Mayers, D. F. , " Numerical Solution of Partial Differential Equations ". 2<sup>nd</sup> Ed. Cambridge University Press , UK (2010) .
- [9] Nur Hosain , Abdullah , Md.Mustafa , " Magnetohydrodynamic (MHD) Laminar Free Convective Flow Across a Horizontal Circular Cylinder ". Proceeding of International Conference on Mechanical Engineering (ICME2007) 29-31 December 2007, Dhaka, Bangladesh (2007) .
- [10] Patil Vishwambhars and Timol M. G. , " Similarity Solutions of a Class of Laminar Three- Dimensional Magnetohydrodynamic Boundary Layer Equation of Power Law Fluids ". Int. J. open Problems Compt. Math., Vol. 4, No. 2, June 2011 ISSN 1998-6262 Copyright © ICSRS Publication, www. i-csrs.org (2011).
- [11] Thomas, B.G & Zhang, L., " Mathematical modeling of fluid flow in continuous casting ". a review. ISIJ Intern 41 (10), 1181 1193 (2001) .
- [12] Von Ammon, W., Gelfgat, Y., Gorbunov, L., Muhlbauer, A., Muiznieks, A., Makarov , Y., Virbulis, J. & Muller, G., " Application of magnetic fields in industrial growth of silicon single crystals ". In the 15<sup>th</sup> Riga and 6<sup>th</sup> Pamier Conference on Fundamental and Applied MHD Modeling of MHD turbulence, vol. I, pp. 41 54.Riga,Latvia (2005) .
- [13] Yang , Y., " Natural convective Flow and Heat Transfer in Vertical and Inclined Glazing Cavities ". M.Sc. Thesis , University of Massachusettes (2003) .