

## Measurement Brownian Dimension of Von Koch Curve

*Mahasin Thabit Younis*  
*mahasinthabit@uomosul.edu.iq*  
*College of Computer Sciences and Mathematics*  
*University of Mosul, Mosul, Iraq*

Received on: 26/02/2018

Accepted on: 20/05/2018

### ABSTRACT

The aim of this paper, it's calculate Brownian dimension of fractal pattern has self similarity (Von Koch Curve). This method is Random Middle Third Displacement in  $[0,1]$  has Gaussian distribution. Random processes are the main focus of research by analyzing dynamical systems to determine these 'chaotic' systems function. One such dynamical system is Brownian Motion. Basis of current definitions of physical phenomena.

**Keywords:** Brownian dimension, Brownian Motion, Fractal Sets.

قياس البعد البراوني لمنحني فون كوخ

محاسن ثابت يونس

كلية علوم الحاسوب والرياضيات

جامعة الموصل، الموصل، العراق

تاريخ قبول البحث: 2018\05\20

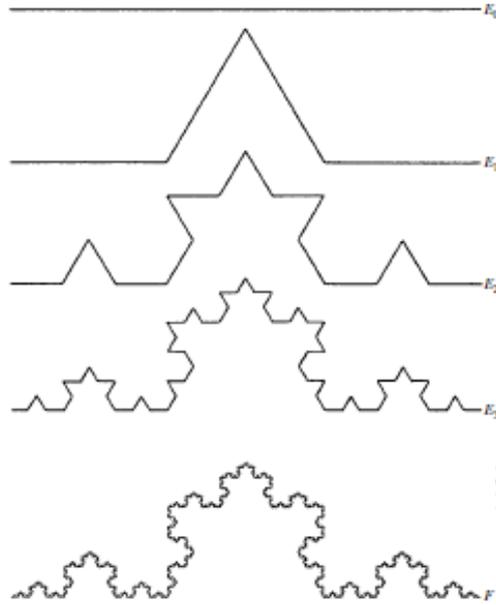
تاريخ استلام البحث: 2018\02\26

### الملخص

إن الهدف من هذا البحث هو حساب البعد البراوني لشكل كسوري يمتلك خاصية التشابه الذاتي وهو منحني فون كوخ. وهي طريقة إزاحة الثلث الأوسط في الفترة  $[0,1]$  التي تتبع توزيع كاوس بالاعتماد على العمليات العشوائية، وتعد العمليات العشوائية المحور الرئيس للبحوث عن طريق تحليل الأنظمة الديناميكية لتحديد هل أن الدالة تتبع نظم 'الفوضى'. وأحد هذه الأنظمة الديناميكية هو الحركة البراونية التي تعد الأساس للظواهر الفيزيائية .  
الكلمات المفتاحية: البعد البراوني، الحركة البراونية، المجموعات الكسورية.

### 1. مقدمة

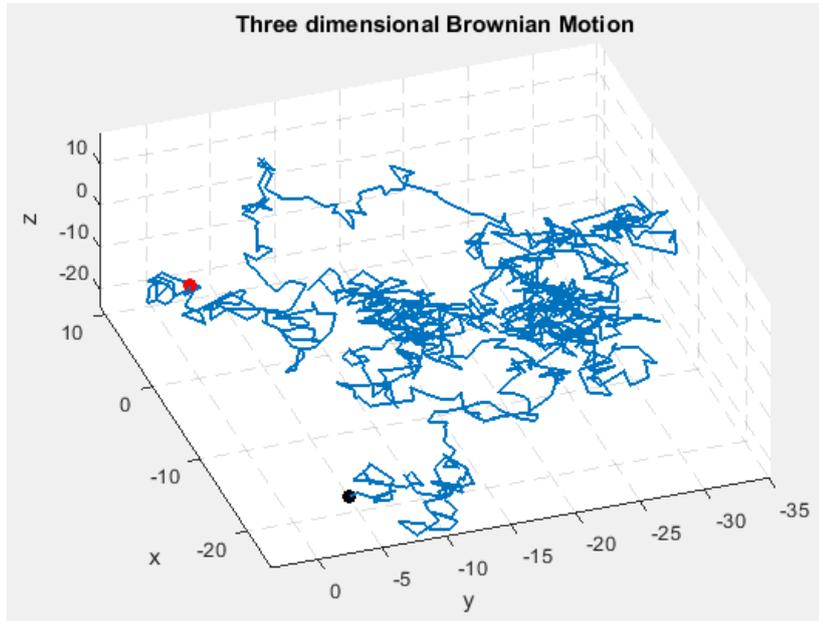
فأصبحت "الكسوريات"، تلعب دوراً رئيسياً في العديد من التطبيقات المهمة للحركة البراونية. يعد العالم Benoit B. Mandelbrot أول من قدم مصطلح "Fractal"، ويمكن تعريف الكسوريات بصورة مبسطة بأنها عبارة عن نمط هندسي متكرر على مختلف المقاييس، وهناك العديد من صور الكسوريات في العالم الحقيقي التي تشكل أنماطاً معقدة وبأحجام مختلفة [1][2][5]، في العام 2002 قدم الباحث Matthew Moore ورقة علمية لحساب البعد البراوني لفترة  $[0,1]$  باستخدام طريقة المنتصف Middle Point وحساب البعد البراوني لفترة  $[0,1]$  باستخدام للحركة البراونية ذات البعد الواحد [6]. ويعد منحني فون كوخ Von Koch curve من أشهر الكسوريات التي تتولد بعمليات تكرارية بسيطة الذي سيكون محور بحثنا هذا والمبين في الشكل (1).



الشكل(1): منحنى فون كوخ

## 2. الحركة البراونية

في عام 1827 قدم عالم النبات روبرت براون الحركة البراونية، وهي عبارة عن حركة عشوائية للجزيئات الموجودة في التجاويف داخل حبوب اللقاح في الماء التي يمكن ملاحظتها بالمجهر. وفي عام 1905 نشر العالم ألبرت أينشتاين ورقة علمية فسرت بدقة كيفية حدوث هذه الحركة، وأكدت على وجود الذرات والجزيئات [7]. والشكل التالي يوضح الحركة العشوائية لجزيئة أو ذرة في سائل الذي يمثل الحركة البراونية .



الشكل(2): الحركة البراونية

وتعد الحركة البراونية مغلقة تحت تأثير توزيع كاوس، إذا كان  $X$  متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمعدل  $\mu$  وتباين  $\sigma^2$  فإن :

$$P\{X > x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du, \quad \forall x \in R$$

تسمى العملية الإحصائية لقيمة حقيقية  $\{B(t): t \geq 0, \forall x \in R\}$  بالحركة البراونية الخطية. وتحقق الخواص الآتية [9]:

$$B(0) = x - 1$$

2- مقدار الزيادة تكون مستقلة لتغير الزمن  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$  فإن مقدار الزيادة  $B(t_n) - B(t_1)$  هي متغيرات عشوائية مستقلة.

3-  $\forall t \geq 0, h > 0$  فإن مقدار الزيادة  $B(t+h) - B(t)$ ، تتوزع توزيعاً طبيعياً بمعدل يساوي صفراً وتباين  $h$ .

4- الدالة  $B(t) \rightarrow t$  هي دالة مستمرة.

عندئذ يمكننا القول  $\{B(t): t \geq 0\}$  هي الحركة البراونية القياسية إذا كانت  $x=0$ .

ويعرف المنحنى البراوني بأنه مجموعة من المتغيرات العشوائية تتغير تبعاً لتغير الزمن ويمتلك الخواص الآتية [3]:

1- لكل  $h > 0$ ، فإن الإزاحة  $X(t+h) - X(t)$  تتبع توزيع كاوس.

2- الإزاحة الحالية  $X(t+h) - X(t)$ ، بحيث ان  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ، لا تعتمد على الإزاحة في الخطوة السابقة.

3- معدل الإزاحة يساوي صفراً.

### 3. الحركة البراونية ذات البعد الواحد

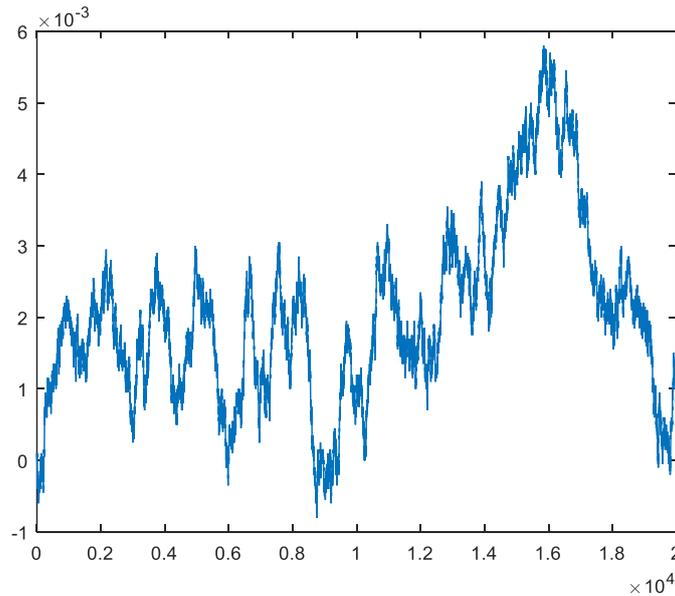
يعد أنموذج الحركة البراونية أحد أفضل النماذج المهمة في الميكانيكا الإحصائية، والحركة البراونية هي

حركة ذات بعد واحد يمكن إيجادها من العمليات العشوائية  $X(t)$ ، أي أن الدالة  $X$  بالنسبة للمتغير الحقيقي  $t$  (متغير بدلالة الزمن) وهي قيم المتغيرات العشوائية  $X(t_1), X(t_2), \dots$  إذا أطلقنا على المقدار  $X(t_2) - X(t_1)$

بالزيادة increment فإنه يتبع توزيع كاوس، لذا فإن معدل مربع الزيادة يتناسب طردياً مع فرق الزمن

$$E[|X(t_2) - X(t_1)|^2] \propto |t_2 - t_1|$$

إذ إن  $E$  يمثل التوقع الرياضي للمتغير العشوائي ويمكننا القول إن  $t$  هي مقدار الزيادة لمتغير  $X$  [3].



الشكل (3): الحركة البراونية

#### 4. الحركة البراونية الكسرية Fractional Brownian Motion

في عام 1940، قدم العالم Kolmogorov الحركة البراونية الكسرية باسم "Wiener spiral"، وعمل كل من Mandelbrot و Van Ness على الحركة البراونية الكسرية من خلال Fractional Integral [11]. يستخدم مفهوم الحركة البراونية الكسرية أيضاً في المجال الطبي وخاصة في مجال التصوير بالموجات فوق الصوتية للكشف عن تشوهات في حجم أو شكل أي من الأجهزة الحيوية. مما يؤدي إلى الكشف عن الأورام السرطانية أسرع وأكثر دقة [4]. تقاس الحركة البراونية الكسرية بوساطة المقياس  $H$  الذي يسمى معامل هيرست 'Hurst parameter' بحيث إن  $H \in (0, 1)$ ، إذا كانت  $H = \frac{1}{2}$  تكون الحركة البراونية قياسية. ويأخذ ثلاث حالات وتبعاً لقيمة  $H$  يتغير سلوك الحركة البراونية الكسرية ويمكن قياس البعد البراوني للسطح الذي يكون بعده التبولوجي 2 إذا كان لمقياس  $0 < H < 1$ ,  $D_B = 2 - H$  [8] [3] [10].

- 1- إذا كانت  $H=0$  تكون المعادلة بخطوات متناوبة.
- 2- إذا كانت  $H = \frac{1}{2}$  تكون الحركة البراونية الكسرية قياسية منتظمة.
- 3- إذا كانت  $H < \frac{1}{2}$  تكون معادلة بارتباط سلبي أي أن الإزاحة تكون متناقصة.
- 4- إذا كانت  $H > \frac{1}{2}$  تكون معادلة بارتباط موجب أي أن الإزاحة تكون متزايدة.

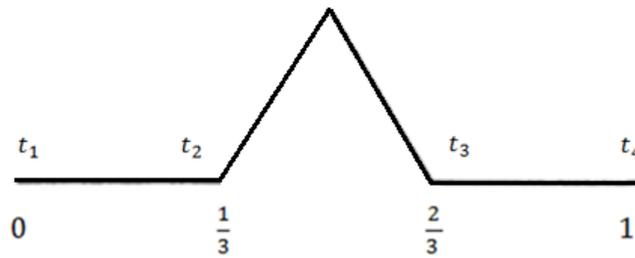
#### 5. منحنى فون كوخ Von Koch Curve

يعد منحنى فون كوخ أهم هيكل يمكن بناءه في علم الكسوريات بوساطة عمليات تكرارية هندسية بسيطة على الفترة  $[0, 1]$ ، إذ تقسم الفترة إلى ثلاثة أقسام متساوية ويستبدل الجزء الثاني من الفترة بمثلث متساوي الساقين بدون قاعدة، يكون العدد الكلي للقطع أربعة طول كل منها  $\frac{1}{3}$  وهكذا تعاد العملية نفسها على كل قطعة نتجت من التكرار السابق وكما موضح في الشكل (1).

#### 6. طريقة قياس البعد البراوني لمنحنى فون كوخ

حسبت هذه العملية للزمن  $t$  في الفترة  $[0, 1]$ ، حيث إن  $X(0) = 0$ ، أما  $X(1)$  فهي عينة عشوائية تتبع توزيع كاوس بمعدل يساوي صفر وتباين  $\sigma^2$ .

$$\begin{aligned} \text{var}(X(1) - X(0)) &= \sigma^2 \\ \text{var}(X(t_2) - X(t_1)) &= |t_2 - t_1| \sigma^2 \end{aligned}$$



الشكل (4): التكرار الأول لمنحنى فون كوخ

لكل  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \leq 1$ ، نفرض أن  $X(1/3)$  لها معدل  $X(0)$  نفسه و  $X(1)$  مضافاً إليها المسافة العمودية لتوزيع كاوس  $D_1$ ، بمعدل يساوي صفر وتباين  $\Delta_1^2$ ، نفرض أن  $l_1 \in [0, \frac{1}{3}]$

$$\begin{aligned} X\left(\frac{1}{3}\right) - X(0) &= \frac{1}{3}(X(1) - X(0)) + D_1 \\ \text{var}\left(X\left(\frac{1}{3}\right) - X(0)\right) &= \frac{1}{9}\text{var}(X(1) - X(0)) + \Delta_1^2 \end{aligned}$$

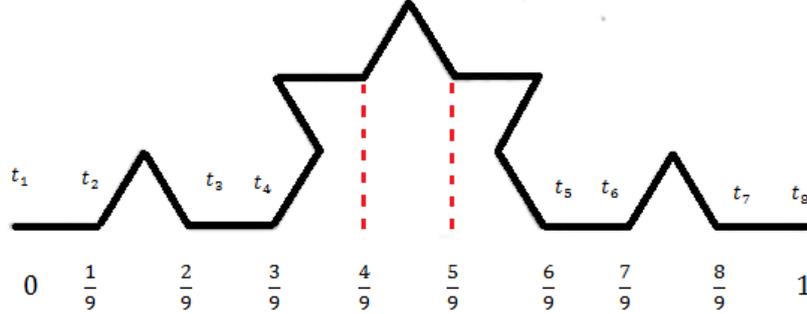
$$|t_2 - t_1|\sigma^2 + \Delta_1^2 = \text{var}(X(t_2) - X(t_1))$$

$$\frac{1}{9}|1 - 0|\sigma^2 + \Delta_1^2 = \frac{1}{3}\text{var}(X(1) - X(0))$$

$$\frac{1}{9}\sigma^2 + \Delta_1^2 = \frac{1}{3}\sigma^2$$

$$\dots\dots\dots(1)\Delta_1^2 = \frac{2}{3^2}\sigma^2$$

كذلك  $X(\frac{1}{3}) - X(0)$  ، و  $X(0) - X(\frac{1}{3})$  لهما المعدل نفسه ، إذا أخذنا  $l_3 \in [\frac{2}{3}, 1]$  ،  $l_2 \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  نحصل على النتيجة نفسها لقيمة  $\Delta_1^2$  كما في المعادلة رقم (1). أما في التكرار الثاني لتقسيم منحني فون كوخ  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \leq t_5 \leq t_6 \leq t_7 \leq t_8 \leq 1$  ، إذا فرضنا أن  $X(1/9)$  لها المعدل نفسه  $X(0)$  و  $X(1)$  مضافاً إليها المسافة العمودية لتوزيع كاوس  $D_2$  ، بمعدل يساوي صفرًا وتباين  $\Delta_2^2$ .



الشكل(5): التكرار الثاني لمنحني فون كوخ

$$X(\frac{1}{9}) - X(0) = \frac{1}{3}(X(\frac{1}{3}) - X(0)) + D_2$$

$$\text{var}(X(\frac{1}{9}) - X(0)) = \frac{1}{9}\text{var}(X(\frac{1}{3}) - X(0)) + \Delta_2^2$$

$$|t_2 - t_1|\sigma^2 + \Delta_2^2 = \text{var}(X(t_2) - X(t_1))$$

$$\frac{1}{9}|\frac{1}{3} - 0|\sigma^2 + \Delta_2^2 = \text{var}(X(\frac{1}{3}) - X(0))$$

$$\frac{1}{27}\sigma^2 + \Delta_2^2 = \frac{1}{9}\sigma^2$$

$$\Delta_2^2 = \frac{2}{27}\sigma^2 = \frac{2}{3^3}\sigma^2$$

وبتطبيق الفكرة نفسها على  $X(\frac{2}{9})$  إلى أن ننتهي من جميع القطع المتكونة من التكرار الثاني فنحصل على قيمة  $\Delta_2^2$  نفسها وبحساب قيمة التغير في التباين لمنحني فون كوخ للتقسيم الثالث والرابع والخامس يمكننا استنتاج الصيغة العامة لمقدار التغير في التباين فتكون قيمته بالشكل الآتي:

$$\Delta_n^2 = \frac{2}{3^{n+1}}\sigma^2$$

لحساب قيمة  $H$  لمنحني فون كوخ لإيجاد سلوك المنحني باستخدام الحركة البراونية الكسرية

$$\text{var}(X(t_2) - X(t_1)) = \sigma^2|t_2 - t_1|^{2H}$$

$$\text{var}(X(\frac{1}{3}) - X(0)) = \frac{1}{3^{2H}}\text{var}(X(1) - X(0)) + \Delta_1^2$$

$$|t_2 - t_1|^{2H}\sigma^2 + \Delta_1^2 = \text{var}(X(t_2) - X(t_1))$$

$$\frac{1}{9}|\frac{1}{3} - 0|^{2H}\sigma^2 + \Delta_1^2 = \frac{1}{3^{2H}}\text{var}(X(1) - X(0))$$

$$\Delta_1^2 = \frac{\sigma^2}{3^{2H}}(1 - 3^{-2}) \dots\dots\dots(2)$$

وتبعاً لتغير الزمن  $\Delta t = (2 \cdot 3^{-n})$  وهو قيمة ثابتة بالنسبة لمنحني فون كوخ حسب المعادلات السابقة وبإضافة العناصر العشوائية للتباين التي تكون قيمتها ثابتة أيضاً  $(2 \cdot 3^{-(n+1)}\sigma^2)$  . نعوض قيمة  $\Delta_1^2$  الناتجة من المعادلة (1) في المعادلة رقم (2) فينتج:

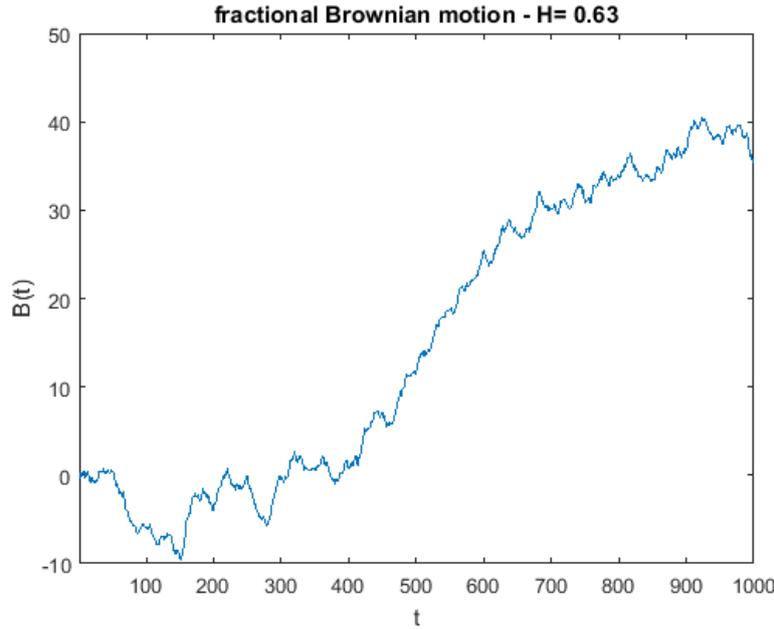
$$\frac{2}{9}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{3^{2H}} (1 - 3^{-2}) \dots \dots \dots (3)$$

$$\frac{2}{9}\sigma^2 = \frac{(8)\sigma^2}{(9)^{3^{2H}}} \rightarrow 3^{2H} = 4$$

$$2H = \frac{\ln 4}{\ln 3} \rightarrow 2H = 1.26 \text{ (البعد الكسوري لمنحني فون كوخ)}$$

$$H = 0.63 > \frac{1}{2}$$

وتبعاً لقيمة  $H$  للمنحني نستنتج أن الإزاحة تكون متزايدة. لذلك فإن البعد البراوني لمنحني فون كوخ  $D_B = 2 - 0.63 = 1.37$  والشكل الآتي يمثل الحركة البراونية الكسرية عند  $H=0.63$ .



الشكل(6): الحركة البراونية الكسرية

#### 7. الاستنتاجات

ركزنا في هذا البحث على نظام الديناميكية المنفصلة لسلوك منحني فون كوخ باستخدام طريقة جديدة وهي طريقة إزاحة الثلث الأوسط من الفترة  $[0,1]$  التي تتبع توزيع كاوس و إيجاد البعد البراوني له باستخدام عمليات تكرارية على كل قطعة ناتجة من تقسيم المنحني في المستوي الواحد من مستويات التقسيم وإيجاد معادلة عامة للطريقة واستخدامها لحساب قيمة المقياس  $H$  لمعرفة سلوك المنحني باستخدام نظام *Matlab*.

المصادر

- [1] Chinnasamy G. and Vanitha S., 2015," Fractional Brownian Motion and Fractal Analysis of Brain Mri Images ", International Journal of Applied Research Vol. 1, No.3, pp. 21-24.
- [2] DeLorto R., 2013,"Fractal dimension and Julia sets", unpublished M. Sc, Eastern Washington University.
- [3] Dietmar S., 1988, "algorithm for random fractals', chapter 2"of 'The Science of Fractal Images, Now York.
- [4] Jonathan Turner,2012,"Brownian Motion Applied to Human Intersections ", M. Sc Texas State University-San Marcos. Clemson University, Clemson, South Carolina.
- [5] Molz F. J. and Liu H. 1997 ,"Fractional Brownian motion and fractional Gaussian noise", water resources research, Vol. 33, No. 10, pp. 2273-2286.
- [6] Moore M., 2002,"One Dimensional Brownian Motion" .
- [7] Mörters P. and Peres Y., 2003, "Brownian Motion".
- [8] Paul Bourguine, 2013,"Hurst Parameter Estimation on Fractional Brownian Motion and Its Application to The Development of The Zebrafish.
- [9] Potgieter P., 2007, "The Fractal Geometry of Brownian Motion" UNISA .
- [10] Wang R., 2014, " Self-Similar Based Time Series Analysis and Prediction ", unpublished M. Sc, University of Toronto.
- [11] Wijeratne C. and Bessaih H. 2015 "Fractional Brownian Motion and an Application to Fluids", Springer International Publishing Switzerland, pp.37-52.