w-Hosoya Polynomials for Connection for Some Special Graphs

Ahmed M.Ali **Assma Salah Aziz** **Hafen Jalal Ahmed**

College of Computer Science and Mathematics *College of Science*

Mosul University, *Duhok University*

Received on: 21/6/2012 **Accepted on: 26/9/2012**

ABSTRACT

Let u and v be any two distinct vertices in a connected graph G. A container $C(u,v)$ is a set of internally disjoint u w is denoted by $C(u,v)$ paths. The width of $v-$ or $w(C(u,v))$ is $|C(u,v)|$, and the length of $\ell(C(u,v))$ is the length of the longest u $v-$ path in $C(u,v)$. Then, for a given positive integer w, the width distance between any two distinct vertices u and v in a connected graph G is define by: $d_w(u,v) = \min_{C(u,v)} \ell(C(u,v))$, where the minimum is taken over all containers $\mathrm{C(u,v)}$ of width w.

In this paper, we find the Hosoya polynomials, and Wiener indices of the join of two special graphs such as bipartite complete graphs, paths, cycles, star graphs and wheel graphs with respect to the width distance.

Keywords: Width distance , w-Hosoya polynomials , Special graphs.

متعددات حدود هوسويا− w لاتصال بعض البيانات الخاصة

أحمد محمد علي **أسماء صلاح عزيز** **هافين جلال أحمد**

كلية علوم الحاسوب والرياضيات، جامعة الموصل *كلية العلوم، جامعة دهوك*

تاريخ استلام البحث: 2012/06/21 **تاريخ قبول البحث: 2012/06/28**

الملخص

تعرف الحاوية بين أي رأسين مختلفين u وv في بيان متصل G على أنها مجموعة من الدروب $u-v$ المنفصلة داخليا، ويرمز لها بـ$C(u,v)$. ويعرف عرض (width) الحاوية $C(u,v)$ على أنه عدد الدروب $u-v$ فيها ويرمز لها w أو $w(C(u,v))$، كما يعرف طول الحاوية $C(u,v)$ على أنه الطول لأطول درب $u-v$ في الحاوية ويعبر عنه بالرمز $\ell(C(u,v))$. تعرف المسافة العرضية−w بين الرأسين u وv في G لكل عدد صحيح موجب w ومعين على أنها $d_w(u,v) = \min_{C(u,v)} \ell(C(u,v))$ حيث أن الأصغر يؤخذ على كل الحاويات $C(u,v)$ للمسافة العرضية−w.

في هذا البحث تم إيجاد متعددات حدود هوسويا للمسافة العرضية−w. لاتصال بيانات خاصة مثل الثنائية التجزئة التامة، والدرب، والدارة، والنجمة، والعجلة. كما تم إيجاد دليل وينر بالنسبة لهذه المسافة لكل من البيانات المذكورة.

الكلمات المفتاحية: المسافة العرضية ، متعددة حدود هوسويا ، بعض البيانات الخاصة.

1. المقدمة:

ليكن u و v أي رأسين مختلفين في بيان متصل G، تعرف الحاوية (container) بين u و v على أنها مجموعة من الدروب $u-v$ المنفصلة داخليا، ويرمز لها بـ$C(u,v)$. ويعرف عرض (width) الحاوية $C(u,v)$ على أنه عدد الدروب $u-v$ فيها، أي أن:

$$w = w(C(u,v)) = |C(u,v)|$$

كما يعرف طول الحاوية $C(u,v)$ على أنه الطول لأطول درب $u-v$ فيها ويرمز له بالرمز $\ell(C(u,v))$.

<u>تعريف</u>: المسافة العرضية w− (w-width distance): لكل عدد صحيح موجب ومعين w ، $w \geq 2$ ، تعرف المسافة العرضية$-w$ بين الرأسين المختلفين u و v في بيان متصل G على أنها

$$d_w(u,v) = \min_{C(u,v)} \ell(C(u,v))$$

إذ أن الأصغر يؤخذ على كل الحاويات $C(u,v)$ ذات العرض w. [2,3]

نلاحظ أنه عندما يكون $w=1$ فان المسافة العرضية$-w$ تصبح المسافة الاعتيادية بين الرأسين u و v ، لذلك سوف نفرض أن $w \geq 2$ ، وعندها يكون $d_w(u,v) \geq 2$ لأي رأسين مختلفين في G، كما نلاحظ أيضا أن w لا يزيد على عامل الاتصال k_0 لرؤوس البيان G، أي أن $2 \leq w \leq k_0$.

لتعريف القطر ونصف القطر للبيان المتصل G بالنسبة للمسافة العرضية -w، سوف نعرف أولا الاختلاف المركزي للمسافة العرضية -w للرأس v على أنه [5]:

$$e_w(v) = \max_{u \in V(G)} \{d_w(u,v)\} ,$$

ويعرف قطر المسافة العرضية -w للبيان G على أنه

$$\delta_w(G) = diam_w G = \max_{v \in V(G)} e_w(v) = \max_{v,u \in V(G)} \{d_w(u,v)\} .$$

كما يعرف نصف القطر للمسافة العرضية -w للبيان G على أنه

$$r_w(G) = rad_w G = \min_{v \in V(G)} e_w(v) .$$

تعرف متعددة حدود هوسويا للمسافة العرضية -w كالآتي :

$$H_w(G;x) = \sum_{k=m_w}^{\delta_w} C_w(G,k) x^k ,$$

إذ أن

$$m_w = m_w(G) = \min_{u,v \in V(G)} \{d_w(u,v)\} ,$$

يعرف دليل وينر للمسافة العرضية -w على أنه مجموع المسافات العرضية -w في البيان G، أي أن

$$W_w(G) = \sum_{u,v \in V(G)} d_w(u,v|G) ,$$

من الواضح أن

$$W_w(G) = \frac{d}{dx} H_w(G;x)\Big|_{x=1} = \sum_{k=m_w}^{\delta_w} k\, C_w(G,k) ,$$

ليكن v رأسا في البيان المتصل G ، فأن **متعددة حدود هوسويا للمسافة العرضية -w للرأس v** تعرف كالآتي [1]:

$$H_w(v,G;x) = \sum_{k \geq m_w}^{\delta_w} C_w(v,G,k)\, x^k ,$$

إذ أن $C_w(v,G,k)$ يمثل عدد رؤوس البيان G التي كل منها تبعد بمسافة عرضية -w تساوي k عن الرأس v. واضح أن

$$\sum_{v \in V} H_w(v,G;x) = 2H_w(G;x) .$$

ليكن G_1 و G_2 بيانين متصلين ومنفصلين بالنسبة للرؤوس ، يعرف اتصال البيانين G_1 و G_2، والذي يرمز له بـ G_1+G_2 على أنه البيان الذي مجموعة رؤوسه هي $V(G_1)\bigcup V(G_2)$ ومجموعة حافاته هي $E(G_1+G_2)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup\{uv:u\in V(G_1),v\in V(G_2)\}$.

للاطلاع على بعض المفاهيم والمصطلحات الواردة في هذا البحث يمكن الرجوع إلى المصدر [4].

من الواضح أن الاتصال لأي بيانين تامين يكون بيانا تاما لذا لا ضرورة لإيجاد متعددة حدود هوسويا- w له.

2. متعددة حدود هوسويا- w لاتصال بيانين ثنائيي التجزئة تامين:

ليكن K_{p_1,p_2} و K_{p_3,p_4} بيانين ثنائيي التجزئة تامين برتبة p_1+p_2 و p_3+p_4 على التوالي. وليكن $p_1\le p_2$ و $p_3\le p_4$ عندها يكون عامل الاتصال [4] لـ $K_{p_1,p_2}+K_{p_3,p_4}$ هو $k_0=p_1+p_3+\min\{p_2,p_4\}$ ، نفرض أن

$V(K_{p_1,p_2})=V_{p_1}\cup V_{p_2}$,

$V(K_{p_3,p_4})=V_{p_3}\cup V_{p_4}$,

حيث أن V_{p_1} و V_{p_2} مجموعتا تجزئة رؤوس البيان K_{p_1,p_2}، وأن V_{p_3} و V_{p_4} مجموعتا تجزئة رؤوس البيان K_{p_3,p_4} . وللسهولة سوف نرمز للبيان $K_{p_1,p_2}+K_{p_3,p_4}$ بالرمز G_b.

لإيجاد متعددة حدود هوسويا- w للبيان G_b سوف نأخذ ثلاث حالات لتوضيح البرهان . سوف نفرض أن $p_2\le p_3$ وبذلك يكون عامل الاتصال لهذا البيان هو $k_0(G_b)=p_1+p_2+p_3$.

الحالة الأولى: إذا كان $u,v\in V_{p_i}$ ، لكل $i=1,2,3,4$ ، فأن هناك $\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{4}p_j$ من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2. لذا فأن

$$d_w(u,v)=2\ ,\ \forall\ 2\le w\le p_1+p_2+p_3\,.$$

الحالة الثانية: 1. إذا كان $u\in V_{p_1}$ و $v\in V_{p_2}$، فأن هناك درباً بطول 1 و p_3+p_4 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2 و p_1-1 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 3. لذا فأن

$$d_w(u,v)=2\ ,\ \forall\ 2\le w\le p_3+p_4+1\,,$$

$$d_w(u,v)=3\ ,\ \forall\ p_3+p_4+2\le w\le p_1+p_3+p_4\,.$$

2. إذا كان $u\in V_{p_3}$ و $v\in V_{p_4}$، فأن هناك درباً بطول 1 و p_1+p_2 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2 و p_3-1 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 3. لذا فأن

$$d_w(u,v)=2\ ,\ \forall\ 2\le w\le p_1+p_2+1\,,$$

$$d_w(u,v)=3\ ,\ \forall\ p_1+p_2+2\le w\le p_1+p_2+p_3\,.$$

الحالة الثالثة: 1. إذا كان $u\in V_{p_1}$ و $v\in V_{p_3}$، فأن هناك درباً بطول 1 و p_2+p_4 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2 و p_1-1 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 3. لذا فأن

$$d_w(u,v)=2\ ,\ \forall\ 2\le w\le p_2+p_4+1\,,$$

$$d_w(u,v)=3\ ,\ \forall\ p_2+p_4+2\le w\le p_1+p_2+p_4\,.$$

2. إذا كان $u \in V_{p_1}$ و $v \in V_{p_4}$، فأن هناك درباً بطول 1 و p_2+p_3 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2 و p_1-1 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 3. لذا فأن

$d_w(u,v)=2 \ , \ \forall \ 2 \le w \le p_2+p_3+1$,

$d_w(u,v)=3 \ , \ \forall \ p_2+p_3+2 \le w \le p_1+p_2+p_3$.

3. إذا كان $u \in V_{p_2}$ و $v \in V_{p_3}$، فأن هناك درباً بطول 1 و p_1+p_4 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2 و p_2-1 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 3. لذا فأن

$d_w(u,v)=2 \ , \ \forall \ 2 \le w \le p_1+p_4+1$,

$d_w(u,v)=3 \ , \ \forall \ p_1+p_4+2 \le w \le p_1+p_2+p_4$.

4. إذا كان $u \in V_{p_2}$ و $v \in V_{p_4}$، فأن هناك درباً بطول 1 و p_1+p_3 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2 و p_2-1 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 3. لذا فأن

$d_w(u,v)=2 \ , \ \forall \ 2 \le w \le p_1+p_3+1$,

$d_w(u,v)=3 \ , \ \forall \ p_1+p_3+2 \le w \le p_1+p_2+p_3$.

من الحالات الثلاثة السابقة يمكن أن نحصل على المبرهنة الآتية:

مبرهنة 1.2: ليكن $p=p_1+p_2+p_3+p_4$ و $N=\sum_{i=1}^{4}\binom{p_i}{2}$، فأن

1. $H_w(G_b;x)=\frac{1}{2}p(p-1)x^2, \ 2 \le w \le p_1+p_2+1$.

2. $H_w(G_b;x)=\{\frac{1}{2}p(p-1)-p_3p_4\}x^2+p_3p_4x^3, \ p_1+p_2+2 \le w \le p_1+p_3+1$.

3. $H_w(G_b;x)=\{\frac{1}{2}p(p-1)-(p_2+p_3)p_4\}x^2+(p_2+p_3)p_4x^3$,

إذا كان $p_1+p_4<p_2+p_3$ و $p_1+p_3+2 \le w \le p_1+p_4+1$

أو $p_1+p_4>p_2+p_3$ و $p_1+p_3+2 \le w \le p_2+p_3+1$.

4. $H_w(G_b;x)=\{\frac{1}{2}p(p-1)-p_2p_3-(p_2+p_3)p_4\}x^2+\{p_2p_3+(p_2+p_3)p_4\}x^3$,

إذا كان $p_1+p_4<p_2+p_3$ و $p_1+p_4+2 \le w \le p_2+p_3+1$.

$H_w(G_b;x)=\{\frac{1}{2}p(p-1)-(p_1+p_2+p_3)p_4\}x^2+(p_1+p_2+p_3)p_4x^3$

إذا كان $p_1+p_4>p_2+p_3$ و $p_2+p_3+2 \le w \le p_1+p_4+1$.

5. $H_w(G_b;x)=\{N+p_1(p_2+p_3)\}x^2+\{p_4(p_1+p_2+p_3)+p_2p_3\}x^3$,

إذا كان $p_1+p_4<p_2+p_3$ و $p_2+p_3+2 \le w \le p_2+p_4+1$.

أو $p_1+p_4>p_2+p_3$ و $p_1+p_4+2 \le w \le p_2+p_4+1$.

6. $H_w(G_b;x)=\{N+p_1p_2\}x^2+\{(p_4+p_3)(p_1+p_2)+p_3p_4\}x^3$,

$p_2+p_4+2 \le w \le p_3+p_4+1$.

7. $H_w(G_b;x)=N\,x^2+\left\{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4}p_ip_j\right\}x^3, \quad p_3+p_4+2 \le w \le p_1+p_2+p_3$. #

نتيجة 2.2: ليكن $p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ ، فأن

1. $W_w(G_b) = p(p-1),\ 2 \le w \le p_1 + p_2 + 1$.
2. $W_w(G_b) = p(p-1) + p_3p_4,\ \ p_1 + p_2 + 2 \le w \le p_1 + p_3 + 1$.
3. $W_w(G_b) = p(p-1) + (p_2 + p_3)p_4\},$

إذا كان $p_1 + p_4 < p_2 + p_3$ و $p_1 + p_3 + 2 \le w \le p_1 + p_4 + 1$

أو $p_1 + p_4 > p_2 + p_3$ و $p_1 + p_3 + 2 \le w \le p_2 + p_3 + 1$.

4. $W_w(G_b) = p(p-1) + p_2p_3 + (p_2 + p_3)p_4,$

إذا كان $p_1 + p_4 < p_2 + p_3$ و $p_1 + p_4 + 2 \le w \le p_2 + p_3 + 1$.

$W_w(G_b) = p(p-1) + (p_1 + p_2 + p_3)p_4$

إذا كان $p_1 + p_4 > p_2 + p_3$ و $p_2 + p_3 + 2 \le w \le p_1 + p_4 + 1$.

5. $W_w(G_b) = p(p-1) + (p_1 + p_2 + p_3)p_4 + p_2p_3,$

إذا كان $p_1 + p_4 < p_2 + p_3$ و $p_2 + p_3 + 2 \le w \le p_2 + p_4 + 1$.

أو $p_1 + p_4 > p_2 + p_3$ و $p_1 + p_4 + 2 \le w \le p_2 + p_4 + 1$.

6. $W_w(G_b) = p(p-1) + (p_4 + p_3)(p_1 + p_2) + p_3p_4,$

$p_2 + p_4 + 2 \le w \le p_3 + p_4 + 1$.

7. $W_w(G_b) = p(p-1) + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4} p_ip_j\ ,\quad p_3 + p_4 + 2 \le w \le p_1 + p_2 + p_3$. #

نتيجة 3.2: إذا كان $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = m$ ، فأن

$$H_w(G_b;x) = \begin{cases} 2m(4m-1)x^2\ , & 2 \le w \le 2m+1 \\ 2m(m-1)x^2 + 6m^2x^3\ , & 2(m+1) \le w \le 3m \end{cases}. \qquad \ldots(3.2.1)$$

البرهان: لتوضيح البرهان نأخذ حالتين فقط

الحالة الأولى: إذا كان $u, v \in V_{p_i}$ ، لكل $i = 1,2,3,4$ ، فأن هناك $3m$ من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2. لذا فأن

$d_w(u,v) = 2\ ,\ \forall\ 2 \le w \le 3m$.

الحالة الثانية: إذا كان $u \in V_{p_i}$ و $v \in V_{p_j}$ ، لكل $i \ne j$ حيث أن $i = 1,2,3$ وأن $j = i+1$ ، فأن هناك درباً بطول 1 و $2m$ من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2 و $m-1$ من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 3. لذا فأن

$d_w(u,v) = 2\ ,\ \forall\ 2 \le w \le 2m+1,$

$d_w(u,v) = 3\ ,\ \forall\ 2(m+1) \le w \le 3m$.

من الحالتين أعلاه يمكن الحصول على الصيغة (3.2.1).

نتيجة 4.2: إذا كان $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = m$ ، فأن

$$W_w(G_b) = \begin{cases} 4m(4m-1)\ , & 2 \le w \le 2m+1 \\ 2m(11m-2)\ , & 2(m+1) \le w \le 3m\ . \end{cases} \qquad \#$$

3. متعددة حدود هوسويا- w لاتصال دربين:

ليكن P_{p_1} و P_{p_2} دربين منفصلين برتبة p_1 و p_2 على التوالي حيث أن $p_1 \le p_2$. وليكن $G_P = P_{p_1} + P_{p_2}$ عندها يكون عامل الاتصال للبيان G_P هو $k_0(G_P) = p_1 + 1$ ، وبفرض أن $V(G_P) = V(P_{p_1}) \cup V(P_{p_2})$ ، حيث أن $V(P_{p_1})$ و $V(P_{p_2})$ هما مجموعتا رؤوس P_{p_1} و P_{p_1} على التوالي والتي هي

$$V(P_{p_1}) = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{p_1}\}$$
$$V(P_{p_2}) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{p_2}\}$$

لإيجاد متعددة حدود هوسويا نأخذ الحالات الآتية:

الحالة الأولى: 1. إذا كان $u, u' \in V(P_{p_1})$ ، فان هناك p_2 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2. بالإضافة إلى درب واحد بطول k حيث أن $1 \le k \le p_1 - 1$ ، $d(u, u') = k$. لذا فان

$$d_w(u,u') = 2 \;,\; \forall\, 2 \le w \le p_1 + 1,\;\; p_1 < p_2,$$
$$d_{p_1+1}(u,u') = 2 \;,\; , p_1 = p_2,\;\; k = 1,2$$
$$d_{p_1+1}(u,u') = 2 \;,\; 3 \le k \le p_1 - 1,\;\; p_1 = p_2 .$$

2. إذا كان $v, v' \in V(P_{p_2})$, فان هناك p_1 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2. بالإضافة إلى درب بطول k حيث أن $1 \le k \le p_2 - 1$ ، $d(v, v') = k$. لذا فان

$$d_w(v,v') = 2 \;,\; \forall\, 2 \le w \le p_1$$
$$d_{p_1+1}(v,v') = 2 \;,\; , k = 1,2$$
$$d_{p_1+1}(v,v') = k \;,\; 3 \le k \le p_2 - 1 .$$

الحالة الثانية: 1. إذا كان $u_i \in V(P_{p_1})$ ، $v_j \in V(P_{p_2})$ ، حيث أن $i = 2,3,\ldots, p_1 - 1$ ، $j = 2,3,\ldots, p_2 - 1$ ، فان هناك درب بطول 1، وأربعة دروب منفصلة داخليا كل منها بطول 2 بالإضافة إلى $p_1 - 3$ من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 3 عندئذ يكون

$$d_w(u_i, v_j) = 2 \quad,\; \forall\, 2 \le w \le 5,$$
$$d_w(u_i, v_j) = 3 \quad,\; \forall\, 6 \le w \le p_1 + 1 .$$

2. إذا كان $u_i \in V(P_{p_1})$ ، $v_j \in V(P_{p_2})$ ، حيث أن $i = 1, p_1$ و $j = 1, p_2$ ، فان هناك درباً بطول 1 ودربين بطول 2 و $p_1 - 2$ من الدروب بطول 3، وعليه فان

$$d_w(u_i, v_j) = 2 \quad,\; w = 2,3,$$
$$d_w(u_i, v_j) = 3 \quad,\; \forall\, 4 \le w \le p_1 + 1 .$$

3. إذا كان $u_i \in V(P_{p_1})$ ، $v_j \in V(P_{p_2})$ ، حيث أن $i = 1, p_1$ و $j = 2,3,\ldots, p_2 - 1$ ، فان هناك درباً بطول 1 وثلاثة دروب بطول 2 و $p_1 - 2$ من الدروب بطول 3 إذا كان $p_1 < p_2$ (أو $p_1 - 3$ من الدروب بطول 3 إذا كان $p_1 = p_2$). لذا فأن

$$d_w(u_i, v_j) = 2 \quad,\; \forall\, 2 \le w \le 4,$$
$$d_w(u_i, v_j) = 3 \quad,\; \forall\, 5 \le w \le p_1 + 1 .$$

4. إذا كان $u_i \in V(P_{p_1})$، $v_j \in V(P_{p_2})$، حيث أن $i=2,3,\dots,p_1-1$ و $j=1,p_2$ ، فان هناك درباً بطول 1 وثلاثة دروب بطول 2 و p_1-3 من الدروب بطول 3. لذا فأن

$$d_w(u_i,v_j)=2 \quad , \forall\, 2\le w\le 4\,,$$
$$d_w(u_i,v_j)=3 \quad , \forall\, 5\le w\le p_1+1\,.$$

من الحالات أعلاه نحصل على المبرهنة الآتية:

مبرهنة (1.3): لكل $p_1<p_2$ حيث أن $p_1\ge 6$ و $w\le p_1+1$، فان

$$H_w(G_P;x)=\left(\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}+p_1p_2\right)x^2\;, w=2,3\,,$$

$$H_4(G_P;x)=\left(\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}+p_1p_2-2\right)x^2+2x^3\,,$$

$$H_5(G_P;x)=\left(\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}+p_1(p_2-2)\right)x^2+2p_1x^3\,,$$

$$H_w(G_P;x)=\left(\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}\right)x^2+p_1p_2x^3,\; 6\le w\le p_1\,,$$

$$H_{p_1+1}(G_P;x)=\left(\binom{p_1}{2}+2p_2-3\right)x^2+p_1p_2x^3+\sum_{k=3}^{p_2-1}(p_2-k)x^k\,. \quad \#$$

من السهولة الحصول على صيغة مشابهة للمبرهنة 1.3 عندما $p_1=p_2=m$.

نتيجة (2.3): لكل $p_1<p_2$ و $w\le p_1+1$، فان

$$W_w(G_p)=2\left(\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}+p_1p_2\right),\; w=2,3\,,$$

$$W_4(G_p)=2\left(\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}+p_1p_2+1\right),$$

$$W_5(G_p)=2\left(\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}+p_1(p_2+1)\right),$$

$$W_w(G_P)=2\left(\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}\right)+3p_1p_2\;,\; 6\le w\le p_1\,,$$

$$W_{p_1+1}(G_P)=2\binom{p_1}{2}+\binom{p_2+1}{3}+3p_1p_2+p_2+1\,. \quad \#$$

4. متعددة حدود هوسويا- w لاتصال دارتين:

ليكن C_{p_1} و C_{p_2} دارتين منفصلتين برتبة p_1 و p_2 على التوالي حيث $p_1\le p_2$. وليكن $G_C=C_{p_1}+C_{p_2}$ عندها يكون عامل الاتصال للبيان G_C هو $k_0(G_C)=p_1+2$ ، وبفرض أن $V(G_C)=V(C_{p_1})\bigcup V(C_{p_2})$. لكي نجد متعددة حدود هوسويا $w-$ لـ G_C نأخذ الحالات الآتية:

الحالـة الأولـى: 1. إذا كـان $u,v \in V(C_{p_1})$ وكـان $d(u,v|C_{p_1})=k$ ، فـان هنـاك دربين منفصـلين داخليا أحدهما بطول k و الآخر p_1-k ، حيث أن $1 \le k \le \left\lfloor \frac{p_1}{2} \right\rfloor$ و p_2 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2. لذا فأن

$$d_w(u,v)=2 \ ,\forall\ 2 \le w \le p_1+2 \ , \ if \ \ p_1+2 \le p_2 ,$$
$$d_{p_1+2}(u,v)=2 \ ,k=1,2 \ , \ if \ \ p_1+1=p_2 \ or \ p_1=p_2 ,$$
$$d_{p_1+2}(u,v)=k \ ,,if \ \ p_1+1=p_2 \ \ 3 \le k \le \left\lfloor \frac{p_1}{2} \right\rfloor$$
$$d_{p_1+2}(u,v)=p_1-k \ ,.if \ \ p_1=p_2 \ \ 3 \le k \le \left\lfloor \frac{p_1}{2} \right\rfloor$$

2. إذا كان $u,v \in V(C_{p_2})$ وكان $d(u,v|C_{p_2})=k$ ، فان هناك دربين أحدهما بطول k والآخر p_2-k ، حيث أن $1 \le k \le \left\lfloor \frac{p_2}{2} \right\rfloor$ و p_1 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2. لذا فأن

$$d_w(u,v)=2 \ ,\forall\ 2 \le w \le p_1 \ ,$$
$$d_{p_1+1}(u,v)=2 \ ,d_{p_1+1}(u,v)=k\ , \ \ k=1,2 \ \ ,,3 \le k \le \left\lfloor \frac{p_2}{2} \right\rfloor$$
$$d_{p_1+2}(u,v)=2 \ , \ 1 \le k \le \left\lfloor \frac{p_2}{2} \right\rfloor , \ \ d_{p_1+2}(u,v)=p_2-k\ , \ k=1,2 \ .$$

الحالة الثانية: إذا كان $u \in V(C_{p_1})$ ، $v \in V(C_{p_2})$ ، فان هناك درباً بطول 1 وأربعة دروب منفصلة داخليا بطول 2 بالإضافة إلى p_1-3 من الدروب المنفصلة داخليا وكل منها بطول 3، وعليه فان

$$d_w(u,v)=2 \quad ,2 \le w \le 5 ,$$
$$d_w(u,v)=3 \quad , \ \forall\, 6 \le w \le p_1+2 .$$

من الحالتين الأولى والثانية نحصل على

مبرهنة (1.4): لكل $p_1+2 \le p_2$ ، حيث أن $p_1 \ge 6$ ، فأن

$$H_w(G_C;x)=\left(\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}+p_1p_2\right)x^2 \quad ,\forall 2 \le w \le 5 \ ,$$

$$H_w(G_C;x)=\left(\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}\right)x^2+p_1p_2x^3 \quad ,\forall 6 \le w \le p_1 \ \ .$$

$$H_{p_1+1}(G_C;x)=\left(\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}+2p_2\right)x^2+p_1p_2x^3+p_2\sum_{k=3}^{\left\lfloor \frac{p_2}{2} \right\rfloor-1}x^k+\begin{cases} p_2x^{\frac{p_2-1}{2}} & , p_2 \ odd \\ \frac{p_2}{2}x^{\frac{p_2}{2}} & , p_2 \ even \end{cases}$$

$$H_{p_1+2}(G_C;x)=\left(\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}+2p_2\right)x^2+p_1p_2x^3+p_2\sum_{k=3}^{\left\lfloor \frac{p_2}{2} \right\rfloor-1}x^{p_2-k}+\begin{cases} p_2x^{\frac{p_2+1}{2}} & , p_2 \ odd \\ \frac{p_2}{2}x^{\frac{p_2}{2}} & , p_2 \ even \end{cases}$$

#

يمكن الحصول على صيغ مقاربة لمبرهنة 1.4 عندما $p_1+1=p_2$ و $p_1=p_2$ من الحالات السابقة.

نتيجة (2.4): لكل $p_1+2\le p_2$ ، حيث أن $p_1\ge 6$ ، فأن

$$W_w(G_C)=2\left(\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}+p_1p_2\right),\forall 2\le w\le 5 \ ,$$

$$W_w(G_C)=2\left(\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}\right)+3p_1p_2 \quad ,\forall 6\le w\le p_1 \ .$$

$$W_{p_1+1}(G_C)=2\left(\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}+\binom{\left\lfloor \frac{p_2}{2}\right\rfloor}{2}\right)+p_2(3p_1+1)+\begin{cases}\dfrac{p_2(p_2-1)}{2} & ,\ p_2\ odd\\ \left(\dfrac{p_2}{2}\right)^2 & ,\ p_2\ even\end{cases}$$

$$W_{p_1+2}(G_C)=2\left(\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}+2p_2\right)+p_2\left(\binom{\left\lfloor \frac{p_2}{2}\right\rfloor}{2}\left(p_2-\frac{2}{3}\left(\left\lfloor \frac{p_2}{2}\right\rfloor-1\right)\right)+(5-3p_2)\right)$$

$$+3p_1p_2+\begin{cases}\dfrac{p_2(p_2+1)}{2} & ,\ p_2\ odd\\ \left(\dfrac{p_2}{2}\right)^2 & ,\ p_2\ even.\end{cases} \qquad \#$$

5. متعددة حدود هوسويا- w لاتصال نجمتين:

ليكن S_{p_1} و S_{p_2} نجمتين منفصلتين برتبة p_1 و p_2 على التوالي حيث $p_1\le p_2$. وليكن $G_S=S_{p_1}+S_{p_2}$ عندها يكون عامل الاتصال للبيان G_S هو $k_0(G_S)=p_1+1$ ، وبفرض أن $V(G_S)=V(S_{p_1})\cup V(S_{p_2})$. من اجل إيجاد متعددة حدود هوسويا $-w$ لـ G_S نفرض أن u' هو الرأس المتجاور مع جميع الرؤوس في النجمة S_{p_1} وان v' هو الرأس المتجاور مع جميع الرؤوس في النجمة S_{p_2} عندها يكون لدينا الحالات التالية:

الحالة الأولى: 1. إذا كان $u,v\in V(S_{p_1})$ وأي من الرأسين لا يمثل u' عندها نلاحظ وجود p_2+1 من الدروب المنفصلة داخليا تصل بين u و v وكل منها بطول 2. أما إذا كان احد الرأسين يمثل u' نجد أن هناك درباً بطول واحد و p_2 من دروب منفصلة داخليا كل منها بطول 2. عندئذ نحصل على

$$d_w(u,v)=2 \ ,\forall 2\le w\le p_1+1 \ .$$

2. إذا كان $u,v\in V(S_{p_2})$ وأي من الرأسين لا يمثل v' عندها نلاحظ وجود p_1+1 من الدروب المنفصلة داخليا تصل بين u و v وكل منها بطول 2. أما إذا كان احد الرأسين يمثل v' نجد أن هناك درباً بطول واحد و p_1 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2. عندئذ نحصل على

$$d_w(u,v)=2 \ ,\forall 2\le w\le p_1+1 \ .$$

الحالة الثانية: 1. إذا كان $u\in V(S_{p_1})-\{u'\}$ و $v\in V(S_{p_2})-\{v'\}$ فان هناك درباً بطول 1 ودربين بطول 2 و p_1-2 من الدروب المنفصلة داخليا وكل منها بطول 3، وعليه فان

$$d_w(u,v)=2 \quad ,w=2,3 \ ,$$

$d_w(u,v)=3 \quad , \forall\, 4\le w\le p_1+1$

2. إذا كان $v\in V(S_{p_2})-\{v'\}$ و $u=u'$، فان هناك درباً بطول 1 و p_1 من الدروب المنفصلة داخليا بطول 2، لذا فأن

$d_w(u',v)=2 \quad ,2\le w\le p_1+1.$

3. إذا كان $u\in V(S_{p_1})$ و $v=v'$ ، فان هناك درباً بطول 1 و p_2 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2، لذا فأن

$d_w(u',v)=2 \quad ,2\le w\le p_1+1.$

4. إذا كان $u=u'$ و $v=v'$، فان هنالك درباً بطول 1 و p_1+p_2-2 من الدروب المنفصلة داخليا وكل منها بطول 2. أي أن

$d_w(u',v')=2 \quad , \forall\; 2\le w\le p_1+1$

من الحالتين السابقتين نحصل على المبرهنة التالية :

مبرهنة (1.5): لكل $p_1\le p_2$ فان :

$$H_w(G_S;x)=\left(\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}+p_1p_2\right)x^2 \quad ,w=2,3\ ,$$

$$H_w(G_S;x)=\left(\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}+(p_1+p_2-1)\right)x^2+(p_1-1)(p_2-1)x^3 \quad ,\forall 4\le w\le p_1+1.\#$$

نتيجة (2.5): لكل $p_1\le p_2$ فان:

$$W_w(G_S)=2\left(\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}+p_1p_2\right) \quad ,w=2,3\ ,$$

$$W_w(G_S)=2\left(\binom{p_1}{2}+\binom{p_2}{2}+p_1p_2\right)+(p_1-1)(p_2-1) \quad ,\forall 4\le w\le p_1+1. \quad \#$$

6. متعددة حدود هوسويا− w لاتصال عجلتين:

ليكن W_{p_1} و W_{p_2} عجلتين برتبة p_1 و p_2 على التوالي، وأن

$V(W_{p_1})=\{w_1,w_2,...,w_{p_1-1},c_1\}$,. $\deg c_1=p_1-1$

$V(W_{p_2})=\{y_1,y_2,...,y_{p_2-1},c_2\}$,. $\deg c_2=p_2-1$

من الواضح أن عامل الاتصال للبيان $G_W=W_{p_1}+W_{p_2}$ هو $k_0(G_W)=\min\{p_1,p_2\}+3$.

ولإيجاد متعددة حدود هوسويا− w للبيان G_W سوف نعالج حالتين:

الأولى: إذا كان $u,v\in W_{p_i}-\{c_i\}$، لكل $i=1,2$، فأن هناك درباً بطول k، ودرباً آخر بطول p_i-1-k ، حيث أن $1\le k\le\left\lfloor\frac{p_i-1}{2}\right\rfloor$، و $p_{3-i}+1$ من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2. لذا فأن

$d_w(u,v)=2 \ ,\ \forall\ 2\le w\le p_{3-i}+1,$

$d_{p_{3-i}+2}(u,v)=2 \ ,k=1,2\ ,\ d_{p_{3-i}+2}(u,v)=k \ \ ,3\le k\le\left\lfloor\frac{p_i-1}{2}\right\rfloor,$

$$d_{p_{3-i}+3}(u,v)=2 \ ,k=1,2, d_{p_{3-i}+3}(u,v)=p_i-1-k \ , \ 3\le k\le \left\lfloor \frac{p_i-1}{2}\right\rfloor .$$

أما إذا كان $u\in W_{p_i}-\{c_i\}$ و $v=c_i$ ، لكل $i=1,2$، فأن هناك درباً بطول واحد و $p_{3-i}+2$ من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2. لذا فأن

$$d_w(u,v)=2 \ , \ \forall \ 2\le w\le p_{3-i}+3 \ , i=1,2 \ .$$

الثانيــة : 1. إذا كـان $u\in V(W_{p_1})-\{c_1\}$ و $v\in V(W_{p_2})-\{c_2\}$، فـأن هنـاك دربـاً بطـول واحـد و6 مـن الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2، أي أن

$$d_w(u,v)=2 \ , \ \forall \ 2\le w\le 7 \ .$$

2. إذا كان $u=c_i$ و $v\in V(W_{p_{3-i}})-\{c_{3-i}\}$، لكل $i=1,2$، فأن هناك درباً بطول واحد و p_i+2 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2، أي أن

$$d_w(c_i,v)=2 \ , \ \forall \ 2\le w\le p_i+3, i=1,2 \ .$$

3. إذا كان $u=c_1$ و $v=c_2$، فأن هناك درباً بطول واحد و p_1+p_2-2 من الدروب المنفصلة داخليا كل منها بطول 2، أي أن

$$d_w(c_1,c_2)=2 \ , \ \forall \ 2\le w\le p_1+p_2-2 \ .$$

من الحالتين السابقتين يمكن أن نحصل على المبرهنة الآتية:

مبرهنة 1.6: لكل $p_1\le p_2$، ولكل $p_1\ge 6$ فأن

- $H_w(G_W;x)=\frac{1}{2}\{p_1(p_1-1)+p_2(p_2-1)+2p_1p_2\}x^2 , \ \ if \ \ 2\le w\le 7 \ .$
- $H_w(G_W;x)=\frac{1}{2}\{p_1(p_1-1)+p_2(p_2-1)+2(p_1+p_2-1)\}x^2 , \ if \ \ 8\le w\le p_1+1 \ .$
- $H_{p_1+2}(G_W;x)=\binom{p_1-1}{2}\sum_{k=2}^{\left\lfloor\frac{p_1-1}{2}\right\rfloor}x^k+\binom{p_2-1}{2}\sum_{k=2}^{\left\lfloor\frac{p_2-1}{2}\right\rfloor}x^k+\{p_1+p_2-1\}x^2 \ .$
- $H_{p_1+3}(G_W;x)=\binom{p_1-1}{2}\sum_{k=2}^{\left\lfloor\frac{p_1-1}{2}\right\rfloor}x^{p_1-1-k}+\binom{p_2-1}{2}\sum_{k=2}^{\left\lfloor\frac{p_2-1}{2}\right\rfloor}x^{p_2-1-k}+\{p_1+p_2-1\}x^2 \ .$

نتيجة 2.6: لكل $p_1\le p_2$، ولكل $p_1\ge 6$ فأن

- $W_w(G_W)=\{p_1(p_1-1)+p_2(p_2-1)+2p_1p_2\}, \ \ \ if \ \ 2\le w\le 7 \ .$
- $W_w(G_W)=\{p_1(p_1-1)+p_2(p_2-1)+2(p_1+p_2-1)\}, \ if \ \ 8\le w\le p_1+1 \ .$
- $W_{p_1+2}(G_W)=\frac{1}{2}\binom{p_1-1}{2}\left\lfloor\frac{p_1-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{p_1+1}{2}\right\rfloor+\binom{p_2-1}{2}\left\lfloor\frac{p_2-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{p_2+1}{2}\right\rfloor+2\{p_1+p_2-1\}$
- $W_{p_1+3}(G_W)=\frac{1}{2}\binom{p_1-1}{2}\left\{2(p_1-1)\left\lfloor\frac{p_1-3}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{p_1-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{p_1+1}{2}\right\rfloor+2\right\}$

$$+\frac{1}{2}\binom{p_2-1}{2}\left\{2(p_2-1)\left\lfloor\frac{p_2-3}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{p_2-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{p_2+1}{2}\right\rfloor+2\right\}+2\{p_1+p_2-1\}.$$

المصادر

[1] A. A. Ali and A. S. Aziz; (2007), "*w*- Wiener Polynomials of the width Distance of some special graphs", Al-Rafiden J. vol. 4, No. 2, pp. 103-124.

[2] B. E. Sagan, Y-N. Yeh, and P. Zhang; (1996), "The Wiener Polynomial of a Graph", Intern. J. of Quantum Chemistry, Vol. 60, pp. 959-969 .

[3] D.F. Hsu; (1994), "On Container Width and Length in Graphs, Groups, and Networks", IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics communications and computer sciences", Vol. E77-A, No.4, pp. 668-680.

[4] R. Diestel, (2005). "**Graph Theory**", Springer–Verlag Heidelberg, New York.

[5] T. H. Ismail and A. M. Ali ; (2011), "Hosoya Polynomials of the width Distance of some Cog-Special Graphs", Al-Rafidain J. of Comp. Sci. and Math. Vol. 8, No. 2.