The Basis Number of Quadruple Join of Graphs

Ghassan T. Marougi **Raghad A. Mustafa**
Raghad.Math@uomosul.edu.iq
College of Computer Sciences and Mathematics
University of Mosul

Received on: 23/02/2011 **Accepted on: 04/04/2011**

ABSTRACT

The basis number, b(G) ,of a graph G is defined to be the smallest positive integer k such that G has a k-fold basis for its cycle space. We investigate an upper bound for $b(G_1+G_2+G_3+G_4)$.It is proved that, if G_1, G_2, G_3 and G_4 are connected vertex-disjoint graphs and each has a spanning tree of vertex degree not more than 4, then $b(G_1+G_2+G_3+G_4)\le \max\{4, b(G_1)+1, b(G_2)+2, b(G_3)+2, b(G_4)+1\}$.

The basis number of quadruple join of paths, are studied. It is proved that $b(P_m+P_n+P_p+P_t)=4, \quad \forall m, t\ge 5 \;\; and \;\; n, p\ge 6.$

Keywords: Basis number, Cycle space.

العدد الأساس للاتصال الرباعي للبيانات

غسان طوبيا مروكي **رغد عبد العزيز مصطفى**
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث: 2011/02/23 **تاريخ قبول البحث: 2011/04/04**

الملخص

يعرف العدد الأساس، b(G)، لبيان G على انه العدد الصحيح الموجب الأصغر k بحيث أن لـ G قاعدة ذات ثنية k لفضاء داراته. في هذا البحث درسنا القيد الأعلى لـ $b(G_1+G_2+G_3+G_4)$، حيث برهنا على انه إذا كانت G_1 و G_2 و G_3 و G_4 بيانات متصلة ومنفصلة بالنسبة للرؤوس وكل منها يحتوي على شجرة مولدة بدرجة لا تزيد على 4، فان

$b(G_1+G_2+G_3+G_4)\le \max\{4, b(G_1)+1, b(G_2)+2, b(G_3)+2, b(G_4)+1\}$.

أيضا تم دراسة العدد الأساس للاتصال الرباعي للدروب، حيث توصلنا إلى

$b(P_m+P_n+P_p+P_t)=4, \quad \forall m, t\ge 5 \;\; and \;\; n, p\ge 6.$

الكلمات المفتاحية: العدد الاساس، فضاء الدارات.

1. المقدمة:

في السنوات الأخيرة زاد الاهتمام بالعدد الأساس للبيانات, نشير للقارئ الرجوع إلى البحوث[4], [5], [6], [7], [11], [12], [15] لمزيد من المعلومات. في بحثنا هذا سوف نفترض أن كل البيانات التي تعترضنا هي بيانات منتهية وغير موجهة وبسيطة؛ بالنسبة للمصطلحات غير المعرفة (راجع المصدرين [9] و[10]).

ليكن G بياناً متصلا حافاته $e_1, e_2, e_3, ..., e_q$. لكل مجموعة جزئية S من حافات G، يوجد متجه $(a_1, a_2, a_3, ..., a_q)$ يقابل S بحيث أن $a_i = 1$ إذا كان $e_i \in S$ و $a_i = 0$ إذا كان $e_i \notin S$. هذه المتجهات تكوّن فضاء متجهات ذا البعد q على الحقل Z_2, يطلق عليه فضاء المتجهات المقترن مع البيان G ويرمز له $(Z_2)^q$. متجهات $(Z_2)^q$ التي تقابل دارات G تولد فضاء متجهات جزئي يطلق عليه **فضاء الدارات** لـ G ويرمز له $\xi(G)$. كل متجه في $\xi(G)$ يمثل أما دارة في G أو اتحاد دارات منفصلة عن بعضها بالنسبة للحافات. من النتائج المعروفة في نظرية البيان أن بعد فضاء الدارات لبيان متصل G $\xi(G)$ هو q-p+1 حيث أن p تمثل عدد رؤوس G و q عدد حافاته.

إن طريقة إيجاد القاعدة لفضاء الدارات $\xi(G)$ هي كالآتي:

لتكن T شجرة مولدة في G؛ إذا كانت e حافة تنتمي إلى G-T عندئذ, T+e يحتوي على دارة واحدة فقط ولتكن C_e. واضح أن q-p+1 من الدارات C_e, حيث $e \in G - T$ تشكل **قاعدة** لفضاء الدارات $\xi(G)$.

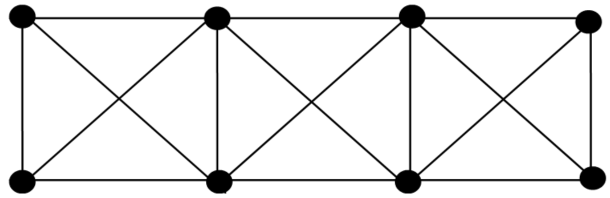
يقال لقاعدة B لفضاء الدارات $\xi(G)$ أنها ذات **ثنية–k** (k-fold) إذا كانت كل حافة من حافات G لا تظهر في أكثر من k من المرات في الدارات التي تقابل المتجهات في القاعدة B.

ويعرف العدد الأساس (*basis number*) لبيان G بأنه العدد الصحيح الأصغر k بحيث أن $\xi(G)$ له قاعدة ذات ثنية–k ؛ ويرمز له b(G). إذا كانت B قاعدة لفضاء الدارات $\xi(G)$ وان e حافة في G ,عندئذ **الثنية للحافة e في B** يرمز لها $f_B(e)$, هي عدد الدارات الموجودة في B والمحتوية على الحافة e.

تعريف (1):

ليكن $G_1 = (X, E_1)$ و $G_2 = (Y, E_2)$ و $G_3 = (Z, E_3)$ و $G_4 = (U, E_4)$ بيانات بسيطة ومنفصلة بالنسبة للرؤوس فان **اتصال البيانان** G_1 و G_2 هو بيان مجموعة رؤوسه هي $X \bigcup Y$ ومجموعة حافاته هي $E_1 \bigcup E_2 \bigcup \{xy | x \in X, y \in Y\}$ ويرمز له $G_1 + G_2$؛ كذلك **الاتصال الثلاثي** للبيانات G_1 و G_2 و G_3 هو بيان مجموعة رؤوسه هي $X \bigcup Y \bigcup Z$ ومجموعة حافاته هي $E_1 \bigcup E_2 \bigcup E_3 \bigcup \{xy | x \in X, y \in Y\} \bigcup \{yz | y \in Y, z \in Z\}$ ويرمز له $G_1 + G_2 + G_3$؛ وبالمثل نعرف **الاتصال الرباعي** $G_1 + G_2 + G_3 + G_4$ بأنه بيان مجموعة رؤوسه هي $X \bigcup Y \bigcup Z \bigcup U$ ومجموعة حافاته هي $E_1 \bigcup E_2 \bigcup E_3 \bigcup E_4 \bigcup \{xy | x \in X, y \in Y\} \bigcup \{yz | y \in Y, z \in Z\} \bigcup \{zu | z \in Z, u \in U\}$

فمثلاً $P_4 = K_1 + K_1 + K_1 + K_1$ والشكل (1) يوضح الاتصال الرباعي للبيان التام K_2



شكل (1). $K_2 + K_2 + K_2 + K_2$

وبطريقة مشابهة نعرف اتصال n من البيانات، $G_1+G_2+...+G_n$ ؛ واضح أن هذا البيان متصل. سوف نرمز للدرب الذي له n من الرؤوس بالرمز P_n .

في عام 1937, برهن مكلين [13] أول مبرهنة مهمة في هذا الموضوع وهي تنص على "يكون البيان G مستويا إذا وفقط إذا $b(G)\le 2$ " وفي عامي 1981 و1982 أوجد شميكل ([8],[16]) العدد الأساس للبيان التام K_n والبيان الثنائي التجزئة التام $K_{m,n}$ ومكعب−n. العدد الأساس للجداء ألمعاجمي للبيانات تم حسابه في [1], كذلك العدد الأساس للجداء الديكارتي لبعض البيانات تم دراسته في [2]، ودرس علي [3] العدد الأساس لاتصال بيانين حيث برهن إذا كان G_1 و G_2 بيانين منفصلين بالنسبة للرؤوس وكل منهما له غابة مولدة بدرجة لا تزيد على 4، فان

$$b(G_1+G_2)\le \max\{4,\mathrm{b}(\mathrm{G}_1)+1,\mathrm{b}(\mathrm{G}_2)+1\}.$$

وفي [15] تم دراسة العدد الأساس للاتصال الثلاثي للبيانات. وفي بحثنا هذا سوف ندرس العدد الأساس للاتصال الرباعي للبيانات، حيث برهنا

$$b(G_1+G_2+G_3+G_4)\le \max\{4,\mathrm{b}(\mathrm{G}_1)+1,\mathrm{b}(\mathrm{G}_2)+2,\mathrm{b}(\mathrm{G}_3)+2,\mathrm{b}(\mathrm{G}_4)+1\}$$

كما برهنا

$$b(P_{\mathrm{m}}+P_n+P_p+P_t)=4,\quad \forall m,\mathrm{t}\ge 5\ \ and\ \ n,p\ge 6.$$

2- العدد الأساس لـ $G_1+G_2+G_3+G_4$:

نفــرض أن $X=\{x_1,x_2,...,x_m\}$ و $Y=\{y_1,y_2,...,y_n\}$ و $Z=\{z_1,z_2,...,z_p\}$ و $U=\{u_1,u_2,...,u_t\}$ ونفرض أن $K_{m,n}$ و $K_{n,p}$ و $K_{p,t}$ هي البيانات الثنائية التجزئة والتي مجموعاتها المستقلة على الترتيب هي Y,X و Y,Z و Z,U . شميكل [16] برهن أن

$$B_r(K_{m,n})=\{x_iy_jx_{i+1}y_{j+1}\mid i=1,2,...,m-1\ \ and\ \ j=1,2,...,n-1\}, \qquad ...(1)$$

$$B_r(K_{n,p})=\{y_iz_jy_{i+1}z_{j+1}\mid i=1,2,...,n-1\ \ and\ \ j=1,2,...,p-1\}, \qquad ...(2)$$

$$B_r(K_{p,t})=\{z_iu_jz_{i+1}u_{j+1}\mid i=1,2,...,p-1\ \ and\ \ j=1,2,...,t-1\}. \qquad ...(3)$$

هي القواعد المطلوبة (required bases) لـ $\xi(K_{m,n})$ و $\xi(K_{n,p})$ و $\xi(K_{p,t})$ ذات ثنية 4 على الترتيب؛ أي أن $b(K_{m,n})\le 4$ و $b(K_{n,p})\le 4$ و $b(K_{p,t})\le 4$ لكل $m,n,p,t\ge 5$ ؛ كما أن علي [3] بين أن

$$A_1=\{x_1y_1,x_1y_n,x_my_1,x_my_n\}\bigcup\{y_1z_1,y_1z_p,y_nz_1,y_nz_p\}\bigcup\{z_1u_1,z_1u_t,z_pu_1,z_pu_t\}, \qquad ...(4)$$

هي مجموعة حافات $K_{m,n}$ و $K_{n,p}$ و $K_{p,t}$ ذات ثنية 1 في القاعدة المطلوبة $B_r(K_{m,n})$ و $B_r(K_{n,p})$ و $B_r(K_{p,t})$ على الترتيب وان

$$\begin{aligned}A_2=&(\{x_1y_j,x_my_j\mid j=2,3,...,n-1\}\bigcup\{x_iy_1,x_iy_n\mid i=2,3,...,m-1\})\\&\bigcup(\{y_1z_j,y_nz_j\mid j=2,3,...,p-1\}\bigcup\{y_jz_1,y_jz_p\mid j=2,3,...,n-1\})\\&\bigcup(\{z_1u_j,z_pu_j\mid j=2,3,\ldots,t-1\}\bigcup\{z_ju_1,z_ju_t\mid j=2,3,\ldots,p-1\}).\end{aligned} \qquad ...(5)$$

هي مجموعة حافات $K_{m,n}$ و $K_{n,p}$ و $K_{p,t}$ ذات ثنية 2 في القاعدة المطلوبة $B_r(K_{m,n})$ و $B_r(K_{n,p})$ و $B_r(K_{p,t})$ على الترتيب، ولا توجد حافة ذات ثنية 3 في B_r وبقية الحافات تكون ذات ثنية 4.

الآن سوف ندرس العدد الأساس للاتصال الرباعي للبيانات، أي $b(G_1+G_2+G_3+G_4)$ عندما يكون كل من G_1 و G_2 و G_3 و G_4 بياناً متصلاً وله شجرة مولدة بدرجة لا تزيد على 4.

لتكن T_1 و T_2 و T_3 و T_4 هي أشجار مولدة للبيانات G_1 و G_2 و G_3 و G_4 على الترتيب بحيث أن لـ $i = 1,2,3,4$ فان

$$\deg_{T_i} u \le 4, \forall u \in V(T_i)$$

بما أن كل شجرة تحتوي على رأسين في الأقل بدرجة واحد فإننا نفرض أن

$$\deg_{T_1}(x_1) = \deg_{T_1}(x_m) = \deg_{T_2}(y_1) = \deg_{T_2}(y_n) = \deg_{T_3}(z_1) = \deg_{T_3}(z_p) =$$
$$\deg_{T_4}(u_1) = \deg_{T_4}(u_t) = 1$$

الآن لكل حافة $x_i x_j$ في الشجرة T_1 سوف نختار دارة ثلاثية واحدة وواحدة فقط بالصيغة $x_i x_j y_1$ أو $x_i x_j y_n$ وهذا يكون بالطريقة التالية:

نجزأ مجموعة حافات T_1 إلى مجموعتين جزئيتين هما W_1 و W_1' بحيث أن كل رأس x في T_1 يكون عدد الحافات الواقعة عليه والتي تنتمي إلى نفس المجموعة الجزئية لا تزيد على 2.

بما أن $\deg_{T_1}(x) \le 4$ لكل x في T_1 فان هذه التجزئة ممكنة. الآن، لتكن S_1 هي مجموعة الدارات الثلاثية من T_1 والمعرفة بالشكل الآتي:

$$S_1 = \{x_i x_j y \mid x_i x_j \in E(T_1), y = y_1 \ if \ \ x_i x_j \in W_1 \ \ and \ \ y = y_n \ \ if \ \ x_i x_j \in W_1'$$

وبنفس الطريقة نحصل على المجموعات S_2 و S_3 و S_4 من دارات ثلاثية من حافات الأشجار T_2 و T_3 و T_4 من البيانات G_2 و G_3 و G_4 على الترتيب حيث

$$S_2 = \{x y_i y_j \ \ , y_i y_j z \mid y_i y_j \in E(T_2), x = x_1, z = z_1 \ if \ \ y_i y_j \in W_2 \ \ and \ \ \ x = x_m, z = z_p \ \ if \ \ y_i y_j \in W_2'\},$$

$$S_3 = \{y z_i z_j \ \ , z_i z_j u \mid z_i z_j \in E(T_3), y = y_1, u = u_1 \ \ if \ \ z_i z_j \in W_3 \ \ and \ \ \ y = y_n, u = u_t \ \ if \ \ z_i z_j \in W_3'\} \text{ and}$$

$$S_4 = \{z u_i u_j \mid u_i u_j \in E(T_4), z = z_1 \ \ if \ \ u_i u_j \in W_4 \ \ and \ \ z = z_p \ \ if \ \ u_i u_j \in W_4'\}.$$

واضح أن $|S_1| = m-1$ ، $|S_2| = 2(n-1)$ ، $|S_3| = 2(p-1)$ و $|S_4| = t-1$ وأن

كل حافة من الحافات $x_i y_1$ ، $x_i y_n$ لقيم $i = 1,2,...,m$ تظهر على الأكثر في دارتين في S_1

وكل حافة من الحافات $y_j x_1$ ، $y_j x_m$ لقيم $j = 1,2,...,n$ تظهر على الأكثر في دارتين في S_2

وكل حافة من الحافات $y_j z_1$ ، $y_j z_p$ لقيم $j = 1,2,...,n$ تظهر على الأكثر في دارتين في S_2

وكل حافة من الحافات $z_j y_1$ ، $z_j y_n$ لقيم $j = 1,2,...,p$ تظهر على الأكثر في دارتين في S_3

وكل حافة من الحافات $z_j u_1$ ، $z_j u_t$ لقيم $j = 1,2,...,p$ تظهر على الأكثر في دارتين في S_3

وأخيرا

كل حافة من الحافات $u_j z_1$ ، $u_j z_p$ لقيم $j = 1,2,...,t$ تظهر على الأكثر في دارتين في S_4 .

وألان، نحن مستعدون لإثبات المبرهنة الأساسية في هذا البحث.

مبرهنة (1):

إذا كانت G_1 و G_2 و G_3 و G_4 بيانات متصلة ومنفصلة بالنسبة للرؤوس وكل منها له شجرة مولدة بدرجة لا تزيد عن 4، فان

$$b(G_1 + G_2 + G_3 + G_4) \le \max\{4, \mathrm{b(G_1)}+1, \mathrm{b(G_2)}+2, \mathrm{b(G_3)}+2, \mathrm{b(G_4)}+1\}.$$

البرهان:

لتكن $B_r(G_1)$ و $B_r(G_2)$ و $B_r(G_3)$ و $B_r(G_4)$ هي القواعد المطلوبة (required bases) للبيانات G_1 و G_2 و G_3 و G_4 على الترتيب؛ إضافة لذلك لتكن $B_r(K_{m,n})$ و $B_r(K_{n,p})$ و $B_r(K_{p,t})$ هي القواعد المطلوبة للبيانات $K_{m,n}$ و $K_{n,p}$ و $K_{p,t}$ والمعرفة في (1) و(2) و(3) على الترتيب.

لتكن

$$B = B_r(G_1)\bigcup B_r(G_2)\bigcup B_r(G_3)\bigcup B_r(G_4)\bigcup B_r(K_{m,n})\bigcup B_r(K_{n,p})\bigcup B_r(K_{p,t}) \bigcup S_1\bigcup S_2\bigcup S_3\bigcup S_4$$

والآن سوف نبرهن أن B هي قاعدة لفضاء الدارات $\xi(G_1+G_2+G_3+G_4)$ ؛ من الواضح أن

$$\begin{aligned}|B| &= \dim\xi(G_1)+\dim\xi(G_2)+\dim\xi(G_3)+\dim\xi(G_4)+\dim\xi(K_{m,n})+\dim\xi(K_{n,p})+ \\ &\quad \dim\xi(K_{p,t})+(m-1)+2(n-1)+2(p-1)+(t-1) \\ &= (q_1-m+1)+(q_2-n+1)+(q_3-p+1)+(q_4-t+1)+mn-(m+n)+1+np-(n+p)+1+ \\ &\quad pt-(p+t)+1+m-1+2n-2+2p-2+t-1 \\ &= (q_1+q_2+q_3+q_4+mn+np+pt)-(m+n+p+t)+1 \\ &= \dim\xi(G_1+G_2+G_3+G_4).\end{aligned}$$

حيث q_1 و q_2 و q_3 و q_4 هي عدد الحافات في G_1 و G_2 و G_3 و G_4 على الترتيب.

سوف نبرهن أن B هي مجموعة مستقلة خطيا من الدارات؛ من الواضح أن

$$B_r(G_1)\bigcup B_r(G_2)\bigcup B_r(G_3)\bigcup B_r(G_4)\bigcup B_r(K_{m,n})\bigcup B_r(K_{n,p})\bigcup B_r(K_{p,t})$$

مجموعة مستقلة خطيا وان كلاً من المجموعات S_1 و S_2 و S_3 و S_4 هي مستقلة لأنها تمثل حدود مناطق في بيان مستوي؛ الآن إذا كانت C أي دارة تتولد من دارات S_1 ، فان C تحوي على حافة من T_1 ؛ هذه الحافة غير موجودة في أي تركيب خطي من دارات S_2 . وعليه فان $S_1\bigcup S_2$ مستقلة؛ كذلك دارات S_3 تكون مستقلة عن $S_1\bigcup S_2$ لان كل دارة من S_3 تحوي على حافة من T_3 ؛ وهذه الحافة غير موجودة في أي دارة من دارات $S_1\bigcup S_2$ وعليه فان $S_1\bigcup S_2\bigcup S_3$ دارات مستقلة خطيا؛ إضافة لذلك دارات S_4 مستقلة عن دارات $S_1\bigcup S_2\bigcup S_3$ لان أي دارة في S_4 تحوي على حافة من T_4 ؛ وهذه الحافة غير موجودة في أية تركيب خطي من $S_1\bigcup S_2\bigcup S_3$ وبذلك تكون $S_1\bigcup S_2\bigcup S_3\bigcup S_4$ دارات مستقلة خطيا. ولأجل برهان المجموعة $S=S_1\bigcup S_2\bigcup S_3\bigcup S_4$ مستقلة خطيا عن المجموعة

$$B' = B_r(G_1)\bigcup B_r(G_2)\bigcup B_r(G_3)\bigcup B_r(G_4)\bigcup B_r(K_{m,n})\bigcup B_r(K_{n,p})\bigcup B_r(K_{p,t})$$

نلاحظ أن أية دارة متولدة من S تحتوي على حافات من G_i لقيم $i=1,2,3,4$ وتحتوي أيضا على حافات من $K_{j,k}$ لقيم $j=m,n,p$ و $k=n,p,t$ ؛ في المقابل أية دارة متولدة من B' تحتوي على حافات من G_i لقيم $i=1,2,3,4$ أو حافات من $K_{j,k}$ لقيم $j=m,n,p$ و $k=n,p,t$ لأنها مجموعة منفصلة بالنسبة للحافات، أي أن

$$\sum_{i=1}^{|S|} C_i \neq \sum_{j=1}^{|B'|} b_j \quad ,C_i\in S \ \ and \ \ b_j\in B'$$

وبذلك تكون $B=S\bigcup B'$ مجموعة مستقلة خطيا وعليه تكون قاعدة لـ $\xi(G_1+G_2+G_3+G_4)$.

الآن نحسب الثنية لكل حافة من حافات البيان؛ من (5)، الثنية لكل حافة من الحافات أدناه

$x_i y_1, x_i y_n \quad ,i = 2,3,..., m-1,$
$x_1 y_j, x_m y_j \quad , j = 2,3,..., n-1,$
$y_1 z_j, y_n z_j \quad , j = 2,3,..., p-1,$
$y_j z_1, y_j z_p \quad , j = 2,3,..., n-1,$
$z_1 u_j, z_p u_j \quad , j = 2,3,..., t-1,$
$z_j u_1, z_j u_t \quad , j = 2,3,..., p-1.$

في القاعدة $B_r(K_{m,n})\bigcup B_r(K_{n,p})\bigcup B_r(K_{p,t})$ هي 2 وكل حافة تظهر في الأكثر بدارتين من $S_1\bigcup S_2\bigcup S_3\bigcup S_4$. أيضا من (4) الثنية لكل حافة من الحافات أدناه

$x_1y_1, x_1y_n, x_my_1, x_my_n, y_1z_1, y_1z_p, y_nz_1, y_nz_p, z_1u_1, z_1u_t, z_pu_1, z_pu_t$

هي 1 في القاعدة $B_r(K_{m,n})\bigcup B_r(K_{n,p})\bigcup B_r(K_{p,t})$ وكل حافة تظهر في الأكثر بدارتين من $S_1\bigcup S_2\bigcup S_3\bigcup S_4$ ؛ لذلك فان

$$f_B(e) \le 4 \ \ ,\forall e \in K_{m,n}\bigcup K_{n,p}\bigcup K_{p,t}$$

إضافة لذلك من السهولة التحقق من أن

$$f_B(e) \le \begin{cases} b(G_1)+1 & ,\forall e \in G_1, \\ b(G_2)+2 & ,\forall e \in G_2, \\ b(G_3)+2 & ,\forall e \in G_3, \\ b(G_4)+1 & ,\forall e \in G_4. \end{cases}$$

لأجل ذلك الثنية للقاعدة B هي $\max\{4, b(G_1)+1, b(G_2)+2, b(G_3)+2, b(G_4)+1\}$

وبهذا يتم البرهان.

نتيجة (1):

لكل عدد صحيح موجب $m,n,p,t \ge 3$ فان $b(P_m + P_n + P_p + P_t) \le 4$ والمساواة تتحقق عندما يكون $m,t \ge 5$ و $n,p \ge 6$.

البرهان :

من المبرهنة (1)

$$b(P_m + P_n + P_p + P_t) \le 4 \qquad \ldots(6)$$

من السهولة إثبات أن $P_m + P_n + P_p + P_t$ بيان غير مستوي وعليه بموجب مكلين [13] يكون $b(P_m + P_n + P_p + P_t) \ge 3$ لقيم $m,n,p,t \ge 3$.

نفرض أن $b(P_m + P_n + P_p + P_t) = 3$ ؛ ولتكن B_r هي القاعدة المطلوبة لـ $P_m + P_n + P_p + P_t$ وعليه فان

$$|B_r| = |E(P_m + P_n + P_p + P_t)| - |V(P_m + P_n + P_p + P_t)| + 1$$
$$|B_r| = m-1+n-1+p-1+t-1+mn+np+pt-(m+n+p+t)+1$$
$$= mn+np+pt-3.$$

الآن عدد الدارات التي بطول 3 في القاعدة المطلوبة B_r هو

$$(m-1)+2(n-1)+2(p-1)+t-1 = m+2n+2p+t-6$$

وبقية الدارات بطول 4 فأكثر، وبما أن

$$\sum_{i=1}^{\dim \xi(G)} |C_i| \le b.|E(G)| \ ,$$

حيث $|C_i|$ يرمز إلى طول الدارة C_i وان b هو العدد الأساس للبيان G فان:

$$4[(mn+np+pt-3)-(m+2n+2p+t-6)]+3(m+2n+2p+t-6)\le 3[(m-1)+ (n-1)+(p-1)+(t-1)+mn+np+pt]$$

أي أن

$$mn+np+pt+6\le 4m+5n+5p+4t$$

الآن؛ يمكننا بسهولة التحقق بان المتباينة أعلاه لا تتحقق عندما $m,t\ge 5$ و $n,p\ge 6$ وعليه فان

$$b(P_{\mathrm{m}}+P_n+P_p+P_t)\ge 4 \qquad \forall\ m,t\ge 5 \ and \ \ n,p\ge 6 \qquad \ldots(7)$$

وبربط (6) مع (7) نحصل على المساواة.

ملاحظة:

وبطريقة مشابهة لبرهان المبرهنة 1 نبرهن انه إذا كانت $G_1,G_2,\ldots,G_n$ بيانات متصلة ومنفصلة بالنسبة للرؤوس وكل منها له شجرة مولدة بدرجة لا تزيد عن 4، فان لكل $n\ge 3$

$$b(G_1+G_2+\ldots+G_n)\le \max\{4,\mathrm{b}(\mathrm{G}_1)+1,\mathrm{b}(\mathrm{G}_\mathrm{n})+1,\mathrm{b}(\mathrm{G}_\mathrm{i})+2\,|\,\mathrm{i}=2,3,\ldots,\mathrm{n}\text{ -}1\}.$$

المصادر

[1] Ali, A.A.; Marougi,G.T., (1993), The basis number of the lexicographic product of graphs, Ars combinatoria, Vol.36, pp.271-282.

[2] Ali, A.A.; Marougi,G.T., (1992), The basis number of the Cartesian product of some graphs, J. Indian Math. Soc., Vol. 58, No.2, pp. 123-134.

[3] Ali , A.A.,(1989), The basis number of the join of graphs ,Arab J. Maths., Vol. 10 No. 1&2, pp. 21-32.

[4] Alsardary, S.Y.; Ali, A.A., (2003), The basis number of some special non planar graphs, Czechoslovak Math. J., Vol. 53, No.2, pp. 225-240.

[5] Alzoubi, M.Y.; Jaradat, M.M., (2007), The basis number of the Cartesian product of a path with a circular ladder, a Möbius ladder and a net, Kyungpook Math. J., Vol. 47, No.2, pp. 165-174.

[6] Alzoubi, M.Y.; Jaradat, M.M., (2006), The basis number of the composition of theta graphs with some graph, Ars combinatoria, Vol.79, pp.107-114.

[7] Alzoubi, M.Y.; Jaradat, M.M., (2005), On the basis number of the composition of different ladders with some graphs, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol. 12, pp. 1861-1868.

[8] Banks, J.A.; Schmeichel, E.F., (1982), The basis number of the n-cube, J. combin. Theory, Ser. B, Vol. 33, No.2, pp. 95-100.

[9] Chartrand, G.; Lesniak, L., (1996), Graphs and Digraphs, 3d ed., Chapman & Hall, CRC. Press.

[10] Harary, F., (1972), Graph Theory, 3rd ed., Reading, Massachusetts, Addison-Wesly.

[11] Jaradat, M.M.; Alzoubi, M.Y., (2005), An upper bound of the basis number of the lexicographic product of graphs, Australas J. comb., Vol. 32, pp. 305-312.

[12] Jaradat, M.M.; Alzoubi, M.Y.; Rawashdeh, E.A., (2004), The basis number of the lexicographic product of different ladders,SUT Journal of Mathematics, Vol. 40, No.2, pp. 91-101

[13] Maclane, S., (1937), A combinatorial condition for planar graphs, Fund. Math., Vol. 28, pp. 22-32.

[14] Marougi, G.T., (2009), On the basis number of semi-strong product of K_2 with some special graphs, Raf.J. of comp. & Maths., Vol. 6, No.3, pp. 173-181.

[15] Marougi, G.T.,(2000),On the basis number of ternary join of graphs, Mu' tah Lil-Buhooth Wa Al-Dirasat Vol.15, No.1, pp.35-42.

[16] Schmeichel, E.F., (1981), The basis number of a graph, J. combin. Theory, Ser. B, Vol. 30, No.2, pp. 123-129.