Numerical Solution for Sine-Gordon System in One Dimension

Saad A. Manna
College of Education
University of Dohuk, Iraq

Haneen T. Jassim
College of Computer Science and Mathematics
University of Mosul, Mosul, Iraq

Received on: 04/01/2009 **Accepted on: 17/03/2009**

ABSTRACT

This paper has studied the numerical solution for Sine-Gordon system in one dimensions using finite difference methods. We have used Explicit method and Crank-Nicholson method.A comparison between results of the two methods has been done and we obtained that Crank-Nicholson method is more accurate than the Explicit method but the Explicit method is easer .
We also studied the stability analysis for each method by using Fourier(Von-Neumann) method and obtained that Crank-Nicholson method is unconditionally stable while the Explicit method is stable under the condition $r^2 \le \frac{1}{c^2}$ and $r^2 \le 1$.

Keywords: Sine-Gordon system, finite difference methods, Explicit method, Crank-Nicholson method, stability analysis, Fourier(Von-Neumann) method.

الحل العددي لنظام Sine-Gordon في بعد واحد

سعد عبد الله مناع
كلية التربية، جامعة دهوك

حنين طلال جاسم
كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث: 2009/01/04 **تاريخ قبول البحث:17 /2009/03**

الملخص

يتناول هذا البحث دراسة الحل العددي لنظام Sine-Gordon في بعد واحد باستخدام طريقتين من طرائق الفروقات المنتهيةهما الطريقة الصريحة (Explicit Scheme) والطريقة الضمنية (Crank-Nicholson) وقد تم عمل مقارنة بين نتائج الطريقتين وتبين أن طريقة (Crank-Nicholson) أدق من الطريقة الصريحة علماً أن الطريقة الصريحة هي الأسهل، كما تم دراسة تحليل الاستقرارية لكل طريقة باستخدام طريقة Fourier(Von Neumann) وتبين أن طريقة (Crank-Nicholson) مستقرة على نحوٍ غير مشروط في حين أن الطريقة الصريحة مستقرة تحت الشرط $r^2 \le 1$ و $r^2 \le \frac{1}{c^2}$.

الكلمات المفتاحية: نظام Sine-Gordon ، طرائق الفروقات المنتهية، الطريقة الصريحة، طريقة Crank-Nicholson، تحليل الاستقرارية ، طريقة Fourier(Von Neumann) .

1. المقدمة:

إن معظم الظواهر الفيزيائية سواء كانت في حقل جريان الموائع، الكهرباء، البصريات، انتقال الحرارة أو اهتزاز الأسلاك يمكن أن توصف بصورة عامة بمعادلات تفاضلية جزئية، وأكثر النماذج الواقعية في الفيزياء والكيمياء الحياتية وعلم الأحياء وما شابه هي ذات طبيعة غير خطية مثل التشققات في البلورات، وحركة محفزات أل(DNA) وانتقال النبضات العصبية خلال المحاور العصبية وكيفية حساب الوزن الجزئي للجزيئة العيانية للسليكون.وبصورة عامة فان العديد من المسائل غير الخطية ليس لها حلول تحليلية معروفة لذلك يجب أن تحل بالطرائق العددية[2] .

إن معظم معادلات الموجة ومعادلات التطور اللاخطية هي أصناف خاصة من المعادلات التفاضلية اللاخطية التي تصف كمية فيزيائية تبدي أنواعا مختلفة من خواص الانتشار أو التجمع فان احدى التفسيرات الفيزيائية المهمة هو حل المعادلة التفاضلية الجزئية بطريقة الموجة المنتقلة أو المنفردة (Solitary or Traveling wave solutions) ولصعوبة هذه المسائل فان هناك عددا قليلا من حلول الموجة المنتقلة تم الحصول عليها بطرائق محددة. [10]

وضعت معادلة Klein-Gordon من قبل العالمين Klein and Gordon في العشرينيات بوصفها نموذجا لمعادلة الموجة اللاخطية ، وأول من أطلق اسم Sine-Gordon على معادلة Klein-Gordon العالم Kruskal [1].

في عام (2003) استخدم S. Griffths , Grimshsw and Khusnutdinova نظام معادلات Sine-Gordon الثنائية لدراسة حلول معينة لتعميم استمرارية تبادل الطاقة الدوري في نظام مزدوج من البندولات.[5] ؛ ودرس S. Griffiths, Grimshaw and Khusnutdinova عام (2004) عدم الاستقرارية لزوج من الموجات المتولدة باستخدام نظام Sine-Gordon وتبادل الطاقة بين مكونات النظام .[6]؛كما استخدم H. Arodz and B. Klimasl عام (2005) نظام معادلات Sine-Gordon في دراسة نظام ميكانيكي متكون من عدد غير منتهي من البندولات المزدوجة بتناسق،الذي يمكن أن يؤثر في قضيب صلب.[3]

في هذا البحث سنتناول ظاهرة فيزيائية وهي نظام موجة Sine-Gordon وهو عبارة عن نظام من معادلات تفاضلية جزئية لا خطية من نوع القطع الزائد.وسنقوم بدراسة الحل العددي لنظام Sine-Gordon في بعد واحد باستخدام طريقتين من الطرائق العددية وهما الطريقة الصريحة(Explicit) وطريقة (Crank-Nicholson) والمقارنة بينهما، ثم سنقوم بدراسة استقرارية الحل العددي لكل من الطريقتين والمقارنة بينهما.

2.النموذج الرياضي(The Mathematical Model)

إن نظام Sine-Gordon له الصيغة التالية:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=-\delta^2\sin(u-w)\\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-c^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}&=\sin(u-w)\end{aligned}\right\}\qquad \text{.....(1)}$$

مع الشروط الابتدائية.[9]:-

$$u(x,0)=f(x)\ \text{and}\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,\quad 0\le x\le 2\pi$$
$$w(x,0)=g(x)\ \text{and}\ 0\le x\le 2\pi,\quad \frac{\partial w(x,0)}{\partial t}=0$$

والشروط الحدودية:

$$u(0,t)=u(2\pi,t)=0$$
$$w(0,t)=w(2\pi,t)=0$$

حيث أن δ^2 تمثل نسبة كثافة جزيئات الوسط , و c^2 تمثل النسبة بين سرعة الموجة u والموجة w .

3. اشتقاق صيغة الطريقة الصريحة(Explicit Scheme) لنظام (Sine-Gordon)

في هذه الطريقة سوف نقوم بحساب قيمة $u_{n,m+1}$ و $w_{n,m+1}$ عند الزمن (t_{m+1}) بالاعتماد على قيم معلومة هي $u_{n+1,m}$ و $u_{n,m}$ و $u_{n-1,m}$ و $w_{n+1,m}$ و $w_{n,m}$ و $w_{n-1,m}$ عند الزمن t_m .

نقسم المستطيل $R=\{(x,t):0\le x\le 2\pi, 0\le t\le b\}$ إلى (q-1) و (j-1) من المستطيلات أطوال أضلاعها $\Delta t=k$ و $\Delta x=h$ [8]:

إن التقريب العددي للمشتقات الجزئية الاولى والثانية للدالة (u) بالنسبة الى (x) و (t) والتي حصلنا عليها باستخدام مفكوك تايلر هي كما يلي[4]:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{n,m}=\frac{u_{n+1,m}-u_{n,m}}{h} \qquad \text{.....(2)}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{n,m}=\frac{u_{n,m+1}-u_{n,m}}{k} \qquad \text{.....(3)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{n,m}=\frac{u_{n+1,m}-2u_{n,m}+u_{n-1,m}}{h^2} \qquad \text{.....(4)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{n,m}=\frac{u_{n,m+1}-2u_{n,m}+u_{n,m-1}}{k^2} \qquad \text{.....(5)}$$

وباستخدام المعادلتين (4) و(5) بالنسبة للمتغيرين u و w فإن النظام (1) يصبح:

$$\frac{u_{n,m+1}-2u_{n,m}+u_{n,m-1}}{k^2}-\frac{u_{n+1,m}-2u_{n,m}+u_{n-1,m}}{h^2}=-\delta^2\sin\left(u_{n,m}-w_{n,m}\right) \qquad \text{.....(6)}$$

$$\frac{w_{n,m+1}-2w_{n,m}+w_{n,m-1}}{k^2}-c^2\left[\frac{w_{n+1,m}-2w_{n,m}+w_{n-1,m}}{h^2}\right]=\sin\left(u_{n,m}-w_{n,m}\right) \qquad \text{.....(7)}$$

$$u_{n,m+1}-2u_{n,m}+u_{n,m-1}=-k^2\delta^2\sin(u_{n,m}-w_{n,m})+\frac{k^2}{h^2}(u_{n+1,m}-2u_{n,m}+u_{n-1,m})$$

$$w_{n,m+1}-2w_{n,m}+w_{n,m-1}=k^2\sin(u_{n,m}-w_{n,m})+c^2\frac{k^2}{h^2}(w_{n+1,m}-2w_{n,m}+w_{n-1,m})$$

لتكن $r=k/h$

$$u_{n,m+1}=-k^2\delta^2\sin\left(u_{n,m}-w_{n,m}\right)-u_{n,m-1}+\left(2-2r^2\right)u_{n,m}+r^2\left(u_{n+1,m}+u_{n-1,m}\right) \qquad \text{.....(8)}$$

$$w_{n,m+1}=k^2\sin\left(u_{n,m}-w_{n,m}\right)-w_{n,m-1}+\left(2-2c^2r^2\right)w_{n,m}+c^2r^2\left(w_{n+1,m}+w_{n-1,m}\right) \qquad \text{.....(9)}$$

المعادلات (8) و(9) تمثل تقريب الفروقات المنتهية باستخدام الطريقة الصريحة لنظام Sine Gordon،وتستخدم المعادلات (8) و(9) لحساب الصف الأول $m+1$ من الشبكة باستخدام القيم المعلومة للصفين $m-1, m$ إذ نلحظ أن هذه الطريقة تحسب بشكل صريح القيم المجهولة $w_{n,m+1}, u_{n,m+1}$ بدلالة القيم المعلومة $w_{n,m-1}, w_{n+1,m}, w_{n-1,m}, w_{n,m}, u_{n,m-1}, u_{n+1,m}, u_{n-1,m}, u_{n,m}$.

ولغرض إيجاد الحسابات لهذه القيم نحتاج أن نجد القيم للسطر الثاني عند $t=t_2$.

نضع $m=1$ في المعادلات (8) و(9) ينتج:-

$$u_{n,2}=-k^2\delta^2\sin\left(u_{n,1}-w_{n,1}\right)-u_{n,0}+\left(2-2r^2\right)u_{n,1}+r^2\left(u_{n+1,1}+u_{n-1,1}\right) \quad \ldots..(10)$$

$$w_{n,2}=k^2\sin\left(u_{n,1}-w_{n,1}\right)-w_{n,0}+\left(2-2c^2r^2\right)w_{n,1}+c^2r^2\left(w_{n+1,1}+w_{n-1,1}\right) \quad \ldots..(11)$$

وبأخذ الفروقات المركزية للشرط الابتدائي $\frac{\partial u}{\partial t}=0, \frac{\partial w}{\partial t}=0$ ينتج :

$$\frac{u_{n,2}-u_{n,0}}{2k}=0 \Rightarrow u_{n,2}=u_{n,0}$$

$$\frac{w_{n,2}-w_{n,0}}{2k}=0 \Rightarrow w_{n,2}=w_{n,0}$$

وبالتعويض بالمعادلات (10) و (11) ينتج

$$u_{n,2}=\frac{1}{2}\left[-k^2\delta^2\sin\left(u_{n,1}-w_{n,1}\right)+\left(2-2r^2\right)u_{n,1}+r^2\left(u_{n+1,1}+u_{n-1,1}\right)\right] \quad \ldots..(12)$$

$$w_{n,2}=\frac{1}{2}\left[k^2\sin\left(u_{n,1}-w_{n,1}\right)+\left(2-2c^2r^2\right)w_{n,1}+c^2r^2\left(w_{n+1,1}+w_{n-1,1}\right)\right] \ldots..(13)$$

من المعادلتين (12) و (13) نحسب الصف الثاني بعد أن حسبنا الصف الأول من الشرط الابتدائي ثم من المعادلتين (8) و (9) نحسب الصف الثالث فالرابع وهكذا.

4. اشتقاق صيغة طريقة Crank-Nicholson لنظام Sine-Gordon

في هذه الطريقة يتم إبدال المشتقة الجزئية الثانية u_{xx} بالمعدل الحسابي لتقريبات الفروقات المركزية عند الزمن $m+1$ و $m-1$ ([4] ، [8]) :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{n,m}=\frac{1}{2}\left[\frac{u_{n+1,m+1}-2u_{n,m+1}+u_{n-1,m+1}}{h^2}+\frac{u_{n+1,m-1}-2u_{n,m-1}+u_{n-1,m-1}}{h^2}\right] \quad \ldots..(14)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{n,m}=\frac{u_{n,m+1}-2u_{n,m}+u_{n,m-1}}{k^2} \quad \ldots..(15)$$

وبتعويض المعادلتين (14) و(15) بالنسبة لكل من المتغيرين u, w في النظام(1) نحصل على :

$$\frac{u_{n,m+1}-2u_{n,m}+u_{n,m-1}}{k^2}=-\delta^2\sin\left(u_{n,m}-w_{n,m}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{u_{n+1,m+1}-2u_{n,m+1}+u_{n-1,m+1}}{h^2}+\frac{u_{n+1,m-1}-2u_{n,m-1}+u_{n-1,m-1}}{h^2}\right]$$

$$\frac{w_{n,m+1}-2w_{n,m}+w_{n,m-1}}{k^2}=\sin\left(u_{n,m}-w_{n,m}\right)$$
$$+\frac{c^2}{2}\left[\frac{w_{n+1,m+1}-2w_{n,m+1}+w_{n-1,m+1}}{h^2}+\frac{w_{n+1,m-1}-2w_{n,m-1}+w_{n-1,m-1}}{h^2}\right]$$

$$u_{n,m+1}-2u_{n,m}+u_{n,m-1}=-k^2\delta^2\sin\left(u_{n,m}-w_{n,m}\right)$$
$$+\frac{k^2}{2h^2}\left[u_{n+1,m+1}-2u_{n,m+1}+u_{n-1,m+1}+u_{n+1,m-1}-2u_{n,m-1}+u_{n-1,m-1}\right]$$

$$w_{n,m+1}-2w_{n,m}+w_{n,m-1}=k^2\sin\left(u_{n,m}-w_{n,m}\right)$$
$$+\frac{c^2k^2}{2h^2}\left[w_{n+1,m+1}-2w_{n,m+1}+w_{n-1,m+1}+w_{n+1,m-1}-2w_{n,m-1}+w_{n-1,m-1}\right]$$

$$\left(2+2r^2\right)u_{n,m+1}-r^2\left(u_{n+1,m+1}+u_{n-1,m+1}\right)=-2k^2\delta^2\sin\left(u_{n,m}-w_{n,m}\right)$$
$$-\left(2+2r^2\right)u_{n,m-1}+4u_{n,m}+r^2\left(u_{n+1,m-1}+u_{n-1,m-1}\right)\qquad\ldots..(16)$$

$$\left(2+2c^2r^2\right)w_{n,m+1}-c^2r^2\left(w_{n+1,m+1}+w_{n-1,m+1}\right)=2k^2\sin\left(u_{n,m}-w_{n,m}\right)$$
$$\left(2+2c^2r^2\right)w_{n,m-1}+4w_{n,m}+c^2r^2\left(w_{n+1,m-1}+w_{n-1,m-1}\right)\qquad\ldots..(17)$$

إذ أن المعادلات (16) و (17) هي تقريب الفروقات المنتهية بطريقة Crank-Nicholson لنظام Sine-Gordon وفي هذه الطريقة نحتاج لحساب القيم الثلاث المجهولة في الطرف الأيسر من المعادلات (16) و (17) $u_{n-1,m+1}$ و $u_{n,m+1}$ و $u_{n+1,m+1}$ للمعادلة (16) و $w_{n-1,m+1}$ و $w_{n,m+1}$ و $w_{n+1,m+1}$ للمعادلة (17) إذ أن جميع الحدود في الطرف الأيمن من المعادلات (16) و (17) معلومة، وتؤدي إلى تكوين نظام جبري خطي ثلاثي الأقطار

AX=B
VX=C

إذ أن A و V هما مصفوفتا الـCrank-Nicholson ثلاثيتا الأقطار و X هو متجه عمودي يحوي قيم المجاهيل في الطرف الأيسر و B و C هما متجهان عموديان يحويان القيم المعلومة في الطرف الأيمن.

إن الشروط الحدودية (Boundary Conditions) تستخدم في المعادلتين الأولى والأخيرة فقط

$$u_{1,m-1}=u_{1,m+1}=0 \quad \text{و} \quad u_{n,m-1}=u_{n,m+1}=0$$
$$w_{1,m-1}=w_{1,m+1}=0 \quad \text{و} \quad w_{n,m-1}=w_{n,m+1}=0$$

ويفضل التعبير عن النظام الجبري الناتج من تطبيق طريقة Crank-Nicholson على نظام Sine-Gordon بالنسبة للمتغير u بالشكل الآتي:

$$
\begin{bmatrix}
2+2r^2 & -r^2 & & & & & \\
-r^2 & 2+2r^2 & -r^2 & & & & \\
 & . & & & & & \\
 & & . & & & & \\
 & & & . & & & \\
 & -r^2 & 2+2r^2 & -r^2 & & & \\
 & & . & & & & \\
 & & & . & & & \\
 & & & & . & & \\
 & & -r^2 & 2+2r^2 & -r^2 & & \\
 & & & -r^2 & 2+2r^2 & &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_{2,m+1} \\ u_{3,m+1} \\ . \\ . \\ . \\ u_{p,m+1} \\ . \\ . \\ . \\ u_{n-2,m+1} \\ u_{n-1,m+1}
\end{bmatrix}
=
$$

$$
\begin{bmatrix}
-2k^2\delta^2\sin\left(u_{2,m}-w_{2,m}\right)-\left(2+2r^2\right)u_{2,m-1}+4u_{2,m}+r^2u_{3,m-1} \\
r^2u_{2,m-1}-2k^2\delta^2\sin\left(u_{3,m}-w_{3,m}\right)-\left(2+2r^2\right)u_{3,m-1}+4u_{3,m}+r^2u_{4,m-1} \\
. \\ . \\ . \\
r^2u_{p-1,m-1}-2k^2\delta^2\sin\left(u_{p,m}-w_{p,m}\right)-\left(2+2r^2\right)u_{p,m-1}+4u_{p,m}+r^2u_{p+1,m-1} \\
. \\ . \\ . \\
r^2u_{n-3,m-1}-2k^2\delta^2\sin\left(u_{n-2,m}-w_{n-2,m}\right)-\left(2+2r^2\right)u_{n-2,m-1}+4u_{n-2,m}+r^2u_{n-2,m-1} \\
r^2u_{n-2,m-1}-2k^2\delta^2\sin\left(u_{n-1,m}-w_{n-1,m}\right)-\left(2+2r^2\right)u_{n-1,m-1}+4u_{n-1,m}
\end{bmatrix}
$$

أما بالنسبة للمتغير w فإن المصفوفة تكون بالشكل الآتي:-

$$
\begin{bmatrix}
2+2r^2 & -r^2 & & & & & \\
-r^2 & 2+2r^2 & -r^2 & & & & \\
 & . & & & & & \\
 & & . & & & & \\
 & & & . & & & \\
 & -r^2 & 2+2r^2 & -r^2 & & & \\
 & & . & & & & \\
 & & & . & & & \\
 & & & & . & & \\
 & & -r^2 & 2+2r^2 & -r^2 & & \\
 & & & -r^2 & 2+2r^2 & &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
w_{2,m+1} \\ w_{3,m+1} \\ . \\ . \\ . \\ w_{p,m+1} \\ . \\ . \\ . \\ w_{n-2,m+1} \\ w_{n-1,m+1}
\end{bmatrix}
=
$$

$$
\begin{bmatrix}
2k^2\sin(u_{2,m}-w_{2,m})-(2+2c^2r^2)w_{2,m-1}+4w_{2,m}+c^2r^2w_{3,m-1}\\
c^2r^2w_{2,m-1}+2k^2\sin(u_{3,m}-w_{3,m})-(2+2c^2r^2)w_{3,m-1}+4w_{3,m}+c^2r^2w_{4,m-1}\\
.\\
.\\
.\\
c^2r^2w_{p-1,m-1}+2k^2\sin(u_{p,m}-w_{p,m})-(2+2c^2r^2)w_{p,m-1}+4w_{p,m}+c^2r^2w_{p+1,m-1}\\
.\\
.\\
.\\
c^2r^2w_{n-3,m-1}+2k^2\sin(u_{n-2,m}-w_{n-2,m})-(2+2c^2r^2)w_{n-2,m-1}+4w_{n-2,m}+c^2r^2w_{n-2,m-1}\\
c^2r^2w_{n-2,m-1}+2k^2\sin(u_{n-1,m}-w_{n-1,m})-(2+2c^2r^2)w_{n-1,m-1}+4w_{n-1,m}
\end{bmatrix}
$$

ويتم حل النظام الخطي أعلاه بإحدى الطرائق المباشرة (Direct Methods) أو بالطرائق التكرارية(Iterative Methods).حيث تم استخدام طريقة الحذف لكاوس.

5. تحليل الاستقرارية للطريقة الصريحة باستخدام طريقة فورير (Fourier(Von-Neumann

إن المبدأ العام لهذه الطريقة هو استبدال الحل بطريقة الفروقات المنتهية عند الزمن (t) بالمقدار $\zeta^m e^{i\beta n\Delta x}$ بالنسبة لـ $u_{n,m}$ والمقدار $\gamma^m e^{i\beta n\Delta x}$ بالنسبة لـ $w_{n,m}$ حيث أن $h=\Delta x \;,\; k=\Delta t \;,\; \gamma>0 \;,\; \beta>0 \;,\; i=\sqrt{-1},$ [11].

لتطبيق طريقة Von-Neumann على النظام (1) نحتاج إلى إهمال الحد اللاخطي منه فنحصل على ما يأتي[7]:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=0\\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}&=0
\end{aligned}\right\} \qquad \text{.....(18)}
$$

وباستعمال الطريقة الصريحة نحصل على:

$$u_{n,m+1}=-u_{n,m-1}+(2-2r^2)u_{n,m}+r^2(u_{n+1,m}+u_{n-1,m}) \qquad \text{.....(19)}$$

$$w_{n,m+1}=-w_{n,m-1}+(2-2c^2r^2)u_{n,m}+c^2r^2(w_{n+1,m}+w_{n-1,m}) \qquad \text{.....(20)}$$

وبتعويض $w_{n,m}=\gamma^m e^{i\beta n\Delta x}, u_{n,m}=\zeta^m e^{i\beta n\Delta x}$ في المعادلات (19) و(20) وبالترتيب نحصل على:

$$\zeta^{m+1}e^{i\beta n\Delta x}=-\zeta^{m-1}e^{i\beta n\Delta x}+(2-2r^2)\zeta^m e^{i\beta n\Delta x}+r^2(\zeta^m e^{i\beta(n+1)\Delta x}+\zeta^m e^{i\beta(n-1)\Delta x})$$

$$\gamma^{m+1}e^{i\beta n\Delta x}=-\gamma^{m-1}e^{i\beta n\Delta x}+(2-2r^2c^2)\gamma^m e^{i\beta n\Delta x}+c^2r^2(\gamma^m e^{i\beta(n+1)\Delta x}+\gamma^m e^{i\beta(n-1)\Delta x})$$

وبقسمة المعادلتين أعلاه على $\zeta^m e^{i\beta n\Delta x}$ و $\gamma^m e^{i\beta n\Delta x}$ بالترتيب نحصل على:

$$\zeta=-\zeta^{-1}+(2-2r^2)+r^2(e^{i\beta\Delta x}+e^{-i\beta\Delta x})$$

$$\gamma=-\gamma^{-1}+(2-2c^2r^2)+c^2r^2(e^{i\beta\Delta x}+e^{-i\beta\Delta x})$$

$$\Rightarrow \zeta+\zeta^{-1}=2-2r^2+r^2(2\cos(\beta\Delta x))$$

$$\Rightarrow \gamma+\gamma^{-1}=2-2c^2r^2+c^2r^2(2\cos(\beta\Delta x))$$

$$\Rightarrow \zeta+\zeta^{-1}=2-2r^2+2r^2\left[1-2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \gamma+\gamma^{-1}=2-2c^2r^2+2c^2r^2\left[1-2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \zeta+\zeta^{-1}=2-4r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \gamma+\gamma^{-1}=2-4c^2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\zeta^2+1}{\zeta}=2\left[1-2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma^2+1}{\gamma}=2\left[1-2c^2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)\right]$$

$$A=\left[1-2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)\right]$$

$$B=\left[1-2c^2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \zeta^2+1=2\zeta A \;\Rightarrow \zeta^2-2A\zeta+1=0 \;\Rightarrow \gamma^2-2B\gamma+1=0$$

$$\Rightarrow \zeta=A\pm\sqrt{A^2-1} \;\Rightarrow \gamma=B\pm\sqrt{B^2-1}$$

لكي تكون $|\zeta|\le 1$ و $|\gamma|\le 1$ من الضروري أن تكون $|A|\le 1$ و $|B|\le 1$ وبالترتيب $|A|\le 1$.

$$\left|1-2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)\right|\le 1$$

$$-1\le 1-2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)\le 1$$

بأخذ الطرف الأيمن من المتباينة

$$\Rightarrow 1-2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)\le 1 \Rightarrow 2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)\ge 0 \quad \Rightarrow -2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)\le 0$$

لبعض قيم β يكون $\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)=1 \Leftarrow r^2\ge 0$ وهذا صحيح دائما

وبأخذ الطرف الأيسر من المتباينة

$$-1\le 1-2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)$$

$$-2\le -2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)$$

$$1\ge r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)$$

$$r^2\le \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)}$$

وعليه فان الطريقة مستقرة تحت الشرط

$$r^2 \le 1$$
$$|B| \le 1$$
$$\left|1-2c\ r^2 \sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$$
$$-1 \le 1-2c^2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right) \le 1$$

بأخذ الطرف الأيمن من المتباينة

$$\Rightarrow 1-2c^2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right) \le 1$$
$$\Rightarrow -2c^2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right) \le 0 \quad \Rightarrow 2c^2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right) \ge 0$$

لبعض قيم β يكون $\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)=1 \Rightarrow c^2r^2 \ge 0$ وهذا صحيح دائما

وبأخذ الطرف الأيسر من المتباينة

$$-1 \le 1-2c^2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)$$
$$-2 \le -2c^2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)$$
$$1 \ge c^2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)$$
$$r^2 \le \frac{1}{c^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)}$$

وعليه فان الطريقة مستقرة تحت الشرط

$$r^2 \le \frac{1}{c^2}$$

6.تحليل الاستقرارية لطريقة Crank-Nicholson باستخدام طريقة فورير (Fourier(Von-Neumann

باستخدام طريقة Crank-Nicholson للنظام (1) بعد إهمال الحد اللاخطي منه نحصل على:

$$(1+r^2)u_{n,m+1}-2u_{n,m} = -(1+r^2)u_{n,m-1} + \frac{r^2}{2}\left[u_{n+1,m+1}+u_{n-1,m+1}+u_{n+1,m-1}+u_{n-1,m-1}\right] \quad .....(21)$$

$$(1+c^2r^2)w_{n,m+1}-2w_{n,m} = -(1+c^2r^2)w_{n,m-1} + \frac{c^2r^2}{2}\left[w_{n+1,m+1}+w_{n-1,m+1}+w_{n+1,m-1}+w_{n-1,m-1}\right] \quad .....(22)$$

وبتعويض $w_{n,m}=\gamma^m e^{i\beta n\Delta x}, u_{n,m}=\zeta^m e^{i\beta n\Delta x}$ في المعادلات (21) و(22) وبالترتيب نحصل على:

$$\left(1+r^2\right)\zeta^{m+1}e^{i\beta n\Delta x}-2\zeta^m e^{i\beta n\Delta x}=-\left(1+r^2\right)\zeta^{m-1}e^{i\beta n\Delta x}$$
$$+\frac{r^2}{2}\left[\zeta^{m+1}e^{i\beta(n+1)\Delta x}+\zeta^{m+1}e^{i\beta(n-1)\Delta x}+\zeta^{m-1}e^{i\beta(n+1)\Delta x}+\zeta^{m-1}e^{i\beta(n-1)\Delta x}\right]$$
$$\left(1+c^2r^2\right)\gamma^{m+1}e^{i\beta n\Delta x}-2\gamma^m e^{i\beta n\Delta x}=-\left(1+c^2r^2\right)\gamma^{m-1}e^{i\beta n\Delta x}$$
$$+\frac{c^2r^2}{2}\left[\gamma^{m+1}e^{i\beta(n+1)\Delta x}+\gamma^{m+1}e^{i\beta(n-1)\Delta x}+\gamma^{m-1}e^{i\beta(n+1)\Delta x}+\gamma^{m-1}e^{i\beta(n-1)\Delta x}\right]$$

وبقسمة المعادلتين أعلاه على $\zeta^m e^{i\beta n\Delta x}$ و $\gamma^m e^{i\beta n\Delta x}$ بالترتيب نحصل على:

$$\left(1+r^2\right)\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)-2=\frac{r^2}{2}\left[\zeta\left(2\cos(\beta\Delta x)\right)+\zeta^{-1}\left(2\cos(\beta\Delta x)\right)\right]$$
$$\left(1+c^2r^2\right)\left(\gamma+\gamma^{-1}\right)-2=\frac{c^2r^2}{2}\left[\gamma\left(2\cos(\beta\Delta x)\right)+\gamma^{-1}\left(2\cos(\beta\Delta x)\right)\right]$$
$$\left(1+r^2\right)\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)-2=\frac{r^2}{2}\left[2\cos(\beta\Delta x)\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)\right]$$
$$\left(1+c^2r^2\right)\left(\gamma+\gamma^{-1}\right)-2=\frac{c^2r^2}{2}\left[2\cos(\beta\Delta x)\left(\gamma+\gamma^{-1}\right)\right]$$
$$\left(1+r^2\right)\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)-2=r^2\left(1-2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)\right)\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)$$
$$\left(1+c^2r^2\right)\left(\gamma+\gamma^{-1}\right)-2=c^2r^2\left(1-2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)\right)\left(\gamma+\gamma^{-1}\right)$$
$$\left(1+r^2\right)-r^2+2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)=\frac{2}{\zeta+\zeta^{-1}}$$
$$\left(1+c^2r^2\right)-c^2r^2+2c^2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)=\frac{2}{\gamma+\gamma^{-1}}$$
$$1+2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)=\frac{2}{\zeta+\zeta^{-1}}$$
$$1+2c^2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)=\frac{2}{\gamma+\gamma^{-1}}$$
$$\zeta+\zeta^{-1}=\frac{2}{1+2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)}$$
$$\gamma+\gamma^{-1}=\frac{2}{1+2r^2c^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)}$$
$$\frac{\zeta^2+1}{\zeta}=\frac{2}{1+2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)}$$
$$\frac{\gamma^2+1}{\gamma}=\frac{2}{1+2r^2c^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)}$$

ليكن

$$D=\frac{1}{1+2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)}$$

$$E=\frac{1}{1+2r^2c^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)}$$

$$\zeta^2-2D\zeta+1=0$$

$$\gamma^2-2E\gamma+1=0$$

لكي تكون $|\zeta|\le 1$ و $|\gamma|\le 1$ يجب أن تكون $|D|\le 1$ و $|E|\le 1$ وعلى التوالي

$$\left|\frac{1}{1+2r^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)}\right|\le 1$$

$$\left|\frac{1}{1+2r^2c^2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)}\right|\le 1$$

إذاً فإن طريقة Crank-Nicholson تكون مستقرة على نحو غير مشروط.

7.النتائج العددية:

لغرض الحل العددي نأخذ نظام Sine-Gordon في بعد واحد المتمثل بالنظام (1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\delta^2\sin(u-w)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\sin(u-w)$$

بالشروط الابتدائية والحدودية[9]:

$$u(x,0)=f(x)\text{ and }\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0\quad,\ 0\le x\le 2\pi$$

$$w(x,0)=g(x)\text{ and }\frac{\partial w(x,0)}{\partial t}=0\ ,\ 0\le x\le 2\pi$$

$$u(0,t)=u(2\pi,t)=0$$

$$w(0,t)=w(2\pi,t)=0$$

إذ استخدمنا طريقتين من طرائق الفروقات المنتهية في بعد واحد، الطريقة الأولى هي الطريقة الصريحة(Scheme Explicit) والثانية هي طريقة(Crank-Nicholson) كما تمت المقارنة
بين الطريقتين عندما:-

$$u(x,0)=\sin(x)$$

$$w(x,0)=\sin(x)$$

Explicit Method x=1.884955592 , h=0.314159265 k=0.314159265 , c=0.5 , $\delta=1$		Crank-Nicholson Method x=1.884955592 , h=0.314159265 k=0.314159265 , c=0.5 , $\delta=1$	
$u(x,t)$	$w(x,t)$	$u(x,t)$	$w(x,t)$
0	0	0	0
0.2912	0.2998	0.2915	0.3052
0.5540	0.5703	0.5544	0.5805
0.7625	0.7849	0.7631	0.7990
0.8964	0.9227	0.8971	0.9393
0.9425	0.9702	0.9432	0.9877
0.8964	0.9227	0.8971	0.9393
0.7625	0.7849	0.7631	0.7900
0.5540	0.5730	0.5544	0.5805
0.2912	0.2998	0.2915	0.3052
0	0	0	0
-0.2912	-0.2998	-0.2915	-0.3052
-0.5540	-0.5703	-0.5544	-0.5805
-0.7625	-0.7849	-0.7631	-0.7990
-0.8964	-0.9227	-0.8971	-0.9393
-0.9425	-0.9702	-0.9432	-0.9877
-0.8964	-0.9227	-0.8971	-0.9393
-0.7625	-0.7849	-0.7631	-0.7900
-0.5540	-0.5730	-0.5544	-0.5805
-0.2912	-0.2998	-0.2915	-0.3052
0	0	0	0

جدول (1)

مقارنة بين طريقتي الـ Explicit و Crank-Nicholson

من خلال ملاحظة الجدول (1) نستنتج أن طريقة Crank-Nicholson هي أفضل من طريقة الـ Explicit في بعد واحد كما أن الحل العددي يكون دورياً ومتناظراً أي أن الحل يكون نفسه لكل فترة ولذلك فإننا نحتاج إلى حسابات أقل وبالتالي إلى وقت أقل.

8.الاستنتاجات :

من خلال المقارنة بين حل نظام Sine-Gordon في بعد واحد للطريقة الصريحة (Explicit Method) والطريقة الضمنية (Grank-Nicholson) تبين ان الطريقة الصريحة اسرع واسهل استخداما من الطريقة الضمنية ، بينما الطريقة الضمنية تكون اكثر دقة من الطريقة الصريحة وان الحل في كلا الطريقتين يكون حلا مناظرا مما يؤدي الى الحسابات وتوفير الكثير من الوقت والجهد ، وتم تحليل الاسقرارية لكل من الطريقتين المستخدمتين لحل نظام Sine-Gordon في بعد واحد وباستخدام طريقة Fourier (Von-Neumann) وتبين ان الطريقة الصريحة تكون مستقرة اذا كانت $r^2 \leq 1$ أي $(\Delta t)^2 \leq (\Delta x)^2$ أي انها مستقرة على نحو مشروط بينما تكون الطريقة الضمنية مستقرة لجميع قيم r^2 أي انها مستقرة على نحو غير مشروط.

المصادر

[1] البياتي، نورجان حسن جمعة ، " **التحليل العددي لمعادلة Sine-Gordon باستخدام طريقة الفروقات المنتهية** " ، جامعة الموصل ، أطروحة ماجستير(2005) غير قابلة للنشر.

[2] الدلفي ، حسن مجيد حسون و مشكور، محمود عطا الله مشكور ، (1999) ، "**التحليل الهندسي و العددي التطبيقي**" ، الجامعة التكنلوجية ، بغداد.

[3] ARODZ, H. and KLIMAS, P.,(2005) , "**Chain of impacting pendulums as non-analytically perturbed Sine-Gordon system**", Acta Phys polonica B, No.3, Vol.36.

[4] Gordon D. Smith (1965); "**Numerical Solution of Partial Differential Equations :Finite Difference Methods",** second edition , Oxford University press.

[5] Griffiths, S.D., R.H.J. Grimshaw, K.R. Khusnutdinova, D.E. Pelinovsky, (2003), "**Energy exchange in coupled Sine-Gordon equations and the influence of modulational instability"**, Geophysical Research Abstracts, Vol.5, 00471.

[6] Griffiths,S.D., R.H.J. Grimshaw, K.R. Khusnutdinova,(2003), "**The influence of modulational instability on energy exchange in coupled Sine-Gordon equations"**, Theor. Math. Phys. 137:1446-1456.

[7] Manaa, S. A. and , AL-Mula, A. F. ,(2006)," **Stability Analysis to fisher equation by using numerical Galerkin technique",** Al-Rafide Journalof computer sciences and mathematics, Vol.3,No.2

[8] Mathewes , J.H. and Fink K.D.(2004); **" Numerical Method using Matlab"**, Prentice-Hall , Inc.

[9] Ole H. Hald , (1999), "**Optimal prediction and the Klein-Gordon equation , ar Xivimath"**. NA 9910048, V. 1, 1-16.

[10] Scott , A. C. ,(2003). , Nonlinear Science : "**Emergence and dynamics of coherent structures**" , Second Edition ,Oxford and New York :Oxford University Press

[11] Shanthakumar , M. (1989); **"Computer Based Numerical Analysis"**, Khanna Publishers.