Convert Autoregressive Process from Direct to Continuous Time with Application

Abdulghafoor Salim
drabdul_salim@uomosul.edu.iq
College of Computer Science and Mathematics,
University of Mosul,

Nihal Hashem Hamid
General Directorate of Education
Nineveh

Received on: 2/3/2009 **Accepted on: 17/5/2009**

ABSTRACT

In this research, we discuss the converting problem of auto-regression models at discrete time into auto-regression models at continuous time, basing on the main idea of the scientist "Priestley" who discovered how to convert autoregression models from first and second order. He mentioned that there were difficulties in the process of conversion to reach the general formula (that is to convert regression model from order p).[8]

We then have got the conversion of the general formula AR(p) of converting it from discrete time to continuous time. Practically, we have built an autoregressive model of order one for the time-series of number of persons who were afflicted with Hepatitis -B- after we have taken the first difference to the series.

Keywords : Autoregressive Process models, Hepatitis virus.

عكس نماذج الانحدار الذاتي المتقطعة إلى مستمرة مع تطبيق

عبد الغفور جاسم سالم **نهال هاشم حميد**

كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل قسم الحاسوب، المديرية العامة لتربية نينوى

تاريخ استلام البحث:٢/٣/٢٠٠٩ **تاريخ قبول البحث:١٧/٥/٢٠٠٩**

الملخص

تم في هذا البحث دراسة عملية عكس نماذج الانحدار الذاتي في زمن متقطع إلى نماذج انحدار ذاتي في زمن مستمر وبالاستناد إلى الفكرة الأساسية للعالم Priestley الذي توصل إلى عكس نماذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى والثانية، وأشار إلى ان هناك صعوبة عند التحويل للوصول إلى الصيغة العامة (أي لعكس نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة p) [8] .

وقد تم الحصول على عكس الصيغة العامة AR(p) من زمن متقطع إلى AR(p) في زمن مستمر وتم التوصل إلى إيجاد جدول نستطيع من خلاله عكس نماذج الانحدار الذاتي في زمن متقطع وبأي رتبة p إلى نماذج الانحدار الذاتي في زمن مستمر ولزيادة في التفاصيل لاحظ [2] ،وفي الجانب التطبيقي تم بناء نموذج انحدار ذاتي من الرتبة الأولى للسلسلة الزمنية لعدد الإصابات بمرض التهاب الكبد الفايروسي نمط -B- بعد أخذ الفرق الأول للسلسلة.

الكلمات المفتاحية: نماذج الانحدار الذاتي ، مرض التهاب الفايروسي الكبدي

المقدمة:

السلسلة الزمنية هي مجموعة من القيم المشاهدة لظاهرة معينة في أوقات زمنية متعاقبة، ويستخدم تحليل السلسلة الزمنية للوقوف على حقيقة التغيرات لقيم مشاهدات الظاهرة، وللتنبؤ بالقيم المستقبلية لها ويتم ذلك من خلال بناء نموذج رياضي للسلسلة، كأن يكون خطيا أو غير خطي تبعا لطبيعة السلسلة الزمنية المدروسة. ويعبر عادة عن هذه النماذج على انها معادلات فرقية بمعاملات ثابتة. وعند تمثيل هذه النماذج في زمن مستمر فيمكن التعبير عنها على شكل معادلات تفاضلية بمعاملات ثابتة.

إن السلاسل الزمنية من المفاهيم الرياضية المهمة والمعتمدة للبحوث والدراسات العلمية وتعد الركيزة الأساسية للخطط التنموية وتطوير الأساليب التخطيطية ومدخلا رئيسا للتصدي الحازم لبعض المشاكل والثغرات القائمة في الجوانب الطبية والاقتصادية والعسكرية والخدمية ... [3]. وتبرز أهمية السلاسل الزمنية في البحوث والدراسات العلمية في إعتمادها على القيم المشاهدة للظاهرة ودراسة كيفية التغير في هذه القيم على مدى أوقات زمنية متساوية للوقوف على حقيقة التغيرات التي تطرأ على المشاهدات الملاحظة للظاهرة ومعرفة أسبابها والعوامل المؤثرة فيها لبناء نموذج رياضي ملائم للتعبير عن السلسلة الزمنية للظاهرة.

تم في هذا البحث دراسة عملية عكس نماذج الانحدار الذاتي في زمن متقطع إلى نماذج انحدار ذاتي في زمن مستمر بالإعتماد على الفكرة الأساسية للعالم Priestley، إعتمدنا في الجانب التطبيقي على دراسة سلسلة زمنية في الجانب الطبي حيث تناول البحث ظاهرة مرض التهاب الكبد الفايروسي نمط -B-، الذي يعد مشكلة صحية واجتماعية في الكثير من دول العالم وبات يهدد العديد من الأشخاص بالوفاة أو العجز [1][5].

لقد تم الحصول على الإحصائيات المتوفرة عن أعداد المصابين من مصرف الدم الرئيسي في محافظة نينوى من سنة 1997 ولغاية 2006 . وقسمت على مستوى الأشهر، إلى 120 مشاهدة والتي تمثل أعداد المصابين بهذا المرض. وهناك دراسات عديدة في مجال الغمر (Embedding) والعكس (Converting) نذكر منها:

نشر الباحثان Tong and Chan (1987) بحثهما المشترك حول غمر (Embedding) نماذج الانحدار الذاتي المتقطعة الزمن في نماذج الانحدار الذاتي المستمرة الزمن، وأوضحا انه ليس بالإمكان دائما غمر المعلمات(Parameters) المتقطعة الحقيقية القيم لنموذج كاوس للانحدار

الذاتي من الرتبة الأولى AR(1) في المعلمات المستمرة الحقيقية القيم لنموذج كاوس للانحدار الذاتي من الرتبة الأولى AR(1) [9].

وتناول He and Wang (1989) موضوع غمر نماذج ARMA(p,q) المتقطعة في نماذج ARMA(p',q') المستمرة، وأوضح الباحثان ان المعلمات (Parameters) المتقطعة الحقيقية القيم لنموذج كاوس للانحدار الذاتي والأوساط المتحركة ARMA(p,q) ولكل q < p يمكن غمرها في المعلمات المستمرة الحقيقية القيم لنموذج كاوس للانحدار الذاتي والأوساط المتحركة ARMA(p',q') ولكل q' < p' [7]. وبين Brockwell and Brockwell (1999) أن نماذج الانحدار الذاتي و الأوساط المتحركة وعندما يكون أحد جذور نموذج الأوساط المتحركة على دائرة الوحدة لايمكن غمرها في أي نموذج انحدار ذاتي وأوساط متحركة مستمرة الزمن[6] .

أما في مجال عكس (Converting) نماذج الانحدار الذاتي في زمن متقطع إلى نماذج انحدار ذاتي في زمن مستمر، فقد بين العالم Priestley (1981) آلية تحويل نماذج الانحدار الذاتي المتقطعة من الرتبة الأولى AR(1) ونماذج الانحدار الذاتي المتقطعة من الرتبة الثانية AR(2) إلى نماذج انحدار ذاتي مستمرة من الرتبتين الأولى والثانية على التوالي [8] .

1. الجانب النظري (عكس نماذج الانحدار الذاتي من الزمن المتقطع إلى الزمن المستمر)

يمكن التعبير عن نماذج الانحدار في الزمن المتقطع على إنها معادلات فرقية بمعاملات ثابتة وعند تمثيل هذه النماذج في زمن مستمر فتكتب على شكل معادلات تفاضلية بمعاملات ثابتة [8] . ولان معظم الدراسات تتم عن طريق تجميع القراءات في زمن متقطع علما إنها مستمرة الحدوث لذا سنحاول في هذا المبحث عكس نماذج الانحدار الذاتي في زمن متقطع إلى نماذج انحدار ذاتي في زمن مستمر.

وليكن لدينا النموذج الآتي :-

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X_{t-i} = Y_t$$

ويمكن كتابته بالشكل الآتي:

$$X_t = -a_1 X_{t-1} - \ldots - a_n X_{t-n} + Y_t$$

وهو نموذج انحدار ذاتي من الرتبة (n) ، حيث $\{Y_t\}$ ضوضاء بيضاء(White Noise) و{ t } يمثل الزمن لكل $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ وإن a_i ثوابت تمثل معلمات النموذج حيثُ $i = 1, 2, \ldots, n$ ، $a_0 = 1$.

وقد قام الباحث M.B.Priestley بعكس نموذج الانحدار الذاتي من الرتبتين الأولى والثانية في زمن متقطع إلى نموذج انحدار ذاتي من الرتبتين الأولى والثانية في زمن مستمر.

وفي بحثنا هذا سنحاول الاستفادة من الفكرة التي استخدمها الباحث (Priestley) في عكس نماذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى والثانية في زمن متقطع إلى نماذج انحدار ذاتي من الرتبة الأولى والثانية في زمن مستمر لعكس نماذج الانحدار من الرتبة p ولكل p=1,2,…,k.

1.1 عكس نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الثالثة: AR(3)

ليكن نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الثالثة بالشكل الآتي :

$$X_n + a_1 X_{n-1} + a_2 X_{n-2} + a_3 X_{n-3} = Y_n$$

حيث a_i ثوابت لكل $i = 1,2,3$ و $\{Y_n\}$ ضوضاء بيضاء (White Noise)، لكل $n = o, \pm 1, \pm 2, ...$

وبالاعتماد على صيغة مشابهة في العكس من AR(p) حيث $p = 1,2$ التي استخدمت من قبل العالم M.B.Priestley سوف نحصل على الآتي :

$$-a_3 \Delta^3 X_n + (a_2 + 3a_3)\Delta^2 X_n - (a_1 + 2a_2 + 3a_3)\Delta X_n + (1 + a_1 + a_2 + a_3) X_n = Y_n \quad \dots (1)$$

حيث تشير Δ إلى المعامل الفرقي والمتضمن عامل الإزاحة الخلفي B وكما يأتي :

$$\Delta = (1 - B)$$

ليكن $t = n.\Delta t$ ، وبقسمة طرفي المعادلة (1) على المقدار $\left(-a_3 (\Delta t)^3\right)$ نحصل على:

$$\frac{\Delta^3 X_n}{(\Delta t)^3} - \frac{(a_2 + 3a_3)\Delta^2}{a_3 (\Delta t)^3} X_n + \frac{(a_1 + 2a_2 + 3a_3)\Delta}{a_3 (\Delta t)^3} X_n - \frac{(1 + a_1 + a_2 + a_3)}{a_3 (\Delta t)^3} X_n = \frac{Y_n}{-a_3 (\Delta t)^3}$$

$$\frac{\Delta^3 X_n}{(\Delta t)^3} - \frac{(a_2 + 3a_3)}{a_3 (\Delta t)} \cdot \frac{\Delta^2 X_n}{(\Delta t)^2} + \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3}{a_3 (\Delta t)^2} \cdot \frac{\Delta X_n}{\Delta t} - \frac{(1 + a_1 + a_2 + a_3)}{a_3 (\Delta t)^3} \cdot X_n = \frac{-Y_n}{a_3 (\Delta t)^3}$$

نفرض أن

$$\in(t) = -Y_n / \left[a_3 (\Delta t)^3\right]$$
$$\alpha_1 = -(a_2 + 3a_3) / [a_3 (\Delta t)]$$
$$\alpha_2 = (a_1 + 2a_2 + 3a_3) / \left[a_3 (\Delta t)^2\right]$$
$$\alpha_3 = -(1 + a_1 + a_2 + a_3) / \left[a_3 (\Delta t)^3\right]$$

نأخذ الاقتراب من الصفر لـ Δt سنحصل على المعادلة التفاضلية الشكلية من الرتبة الثالثة:

$$\dddot{X}(t) + \alpha_1 \ddot{X}(t) + \alpha_2 \dot{X}(t) + \alpha_3 X(t) = \in(t)$$

والتي تمثل نموذج انحدار ذاتي مستمر من الرتبة الثالثة.

1.2 عكس نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الرابعة: AR(4)

ليكن لدينا نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الرابعة الآتي:

$$X_n + a_1 X_{n-1} + \ldots + a_4 X_{n-4} = Y_n$$

حيث a_i ثوابت لكل $i=1,2,3,4$ و $\{Y_n\}$ ضوضاء بيضاء ، لكل $n=o,\pm1,\pm2,...$

وبالاعتماد على العلاقات في العكس من AR(p) حيث $p=1,2,3$ أعلاه سوف نحصل على الآتي:

$$a_4\Delta^4X_n-(a_3+4a_4)\Delta^3X_n+(a_2+3a_3+6a_4)\Delta^2X_n-(a_1+2a_2+3a_3+4a_4)\Delta X_n+$$
$$(1+a_1+a_2+a_3+a_4)X_n=Y_n\ . \qquad ...(2)$$

ليكن: $t=n.\Delta t$ ، وبقسمة طرفي المعادلة (2) على المقدار $\left(a_4(\Delta t)^4\right)$ نحصل على:

$$\frac{\Delta^4X_n}{(\Delta t)^4}-\frac{(a_3+4a_4)\Delta^3}{a_4(\Delta t)^4}X_n+\frac{(a_2+3a_3+6a_4)\Delta^2}{a_4(\Delta t)^4}X_n-\frac{(a_1+2a_2+3a_3+4a_4)\Delta}{a_4(\Delta t)^4}X_n$$
$$+\frac{(1+a_1+a_2+a_3+a_4)}{a_4(\Delta t)^4}X_n=\frac{Y_n}{a_4(\Delta t)^4}\ .$$

أو بشكل آخر نحصل على :

$$\frac{\Delta^4X_n}{(\Delta t)^4}-\frac{(a_3+4a_4)}{a_4(\Delta t)}\cdot\frac{\Delta^3X_n}{(\Delta t)^3}+\frac{(a_2+3a_3+6a_4)}{a_4(\Delta t)^2}\cdot\frac{\Delta^2X_n}{(\Delta t)^2}-\frac{(a_1+2a_2+3a_3+4a_4)}{a_4(\Delta t)^3}\cdot\frac{\Delta X_n}{(\Delta t)}$$
$$+\frac{(1+a_1+a_2+a_3+a_4)X_n}{a_4(\Delta t)^4}=\frac{Y_n}{a_4(\Delta t)^4}\ .$$

لتكن:

$$\in(t)=Y_n\ /\ a_4(\Delta t)^4$$
$$\alpha_1=-(a_3+4a_4)/\ a_4(\Delta t)$$
$$\alpha_2=(a_2+3a_3+6a_4)/\ a_4(\Delta t)^2$$
$$\alpha_3=-(a_1+2a_2+3a_3+4a_4)/\ a_4(\Delta t)^3$$
$$\alpha_4=(1+a_1+a_2+a_3+a_4)/\ a_4(\Delta t)^4$$

نأخذ Δt تقترب من الصفر لنحصل على المعادلة التفاضلية الشكلية من الرتبة الرابعة:

$$X^{(4)}(t)+\alpha_1X^{(3)}(t)+\alpha_2X^{(2)}(t)+\alpha_3X^{(1)}(t)+\alpha_4X(t)=\in(t)$$

والتي تمثل نموذج انحدار ذاتي مستمر من الرتبة الرابعة.

1.3 عكس نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الخامسة: AR(5):

ليكن لدينا نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الخامسة الآتي:

$$X_n+a_1X_{n-1}+a_2X_{n-2}+\cdots+a_5X_{n-5}=Y_n$$

حيث a_i ثوابت لكل $i=1,2,\cdots,5$ و $\{Y_n\}$ ضوضاء بيضاء ، لكل $n=o,\pm1,\pm2,...$.

سوف نعتمد على العلاقات في العكس من AR(p) حيث $p=1,2,3,4$ أعلاه لنحصل على الآتي:

$$-a_5\Delta^5X_n+(a_4+5a_5)\Delta^4X_n-(a_3+4a_4+10a_5)\Delta^3X_n+(a_2+3a_3+6a_4+10a_5)\Delta^2X_n-$$
$$(a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5)\Delta X_n+(1+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)X_n=Y_n \qquad ...(3)$$

ليكن $t=n.\Delta t$ ، وبقسمة طرفي المعادلة (3) على المقدار $\left(-a_5(\Delta t)^5\right)$ نحصل على:

$$\frac{\Delta^5X_n}{(\Delta t)^5}-\frac{(a_4+5a_5)\Delta^4}{a_5(\Delta t)^5}X_n+\frac{(a_3+4a_4+10a_5)\Delta^3}{a_5(\Delta t)^5}X_n-\frac{(a_2+3a_3+6a_4+10a_5)\Delta^2}{a_5(\Delta t)^5}X_n+$$
$$\frac{(a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5)\Delta}{a_5(\Delta t)^5}X_n-\frac{(1+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)}{a_5(\Delta t)^5}X_n=-\frac{Y_n}{a_5(\Delta t)^5}$$

أو يمكن كتابتها بالشكل الآتي:

$$\frac{\Delta^5X_n}{(\Delta t)^5}-\frac{(a_4+5a_5)}{a_5(\Delta t)}\cdot\frac{\Delta^4X_n}{(\Delta t)^4}+\frac{(a_3+4a_4+10a_5)}{a_5(\Delta t)^2}\cdot\frac{\Delta^3X_n}{(\Delta t)^3}-\frac{(a_2+3a_3+6a_4+10a_5)}{a_5(\Delta t)^3}\cdot\frac{\Delta^2X_n}{(\Delta t)^2}$$
$$+\frac{(a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5)}{a_5(\Delta t)^4}\cdot\frac{\Delta X_n}{(\Delta t)}-\frac{(1+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)}{a_5(\Delta t)^5}X_n=-\frac{Y_n}{a_5(\Delta t)^5}$$

لتكن:

$$\in(t)=-Y_n/a_5(\Delta t)^5$$
$$\alpha_1=-(a_4+5a_5)/a_5(\Delta t)$$
$$\alpha_2=(a_3+4a_4+10a_5)/a_5(\Delta t)^2$$
$$\alpha_3=-(a_2+3a_3+6a_4+10a_5)/a_5(\Delta t)^3$$
$$\alpha_4=(a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5)/a_5(\Delta t)^4$$
$$\alpha_5=-(1+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)/a_5(\Delta t)^5$$

عندما تقترب Δt من الصفر أي $\Delta t\to 0$ ، نحصل على صيغة المعادلة التفاضلية من الرتبة الخامسة بالشكل الآتي :

$$\overset{(5)}{X}(t)+\alpha_1\overset{(4)}{X}(t)+\alpha_2\overset{(3)}{X}(t)+\alpha_3\overset{(2)}{X}(t)+\alpha_4\overset{(1)}{X}(t)+\alpha_5X(t)=\in(t)$$

حيث $\overset{(5)}{X}(t)$ هي رتبة المعادلة، والتي تمثل نموذج انحدار ذاتي مستمر من الرتبة الخامسة .

1.4 عكس نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة p :AR(p)

ومن خلال الاستمرار في إيجاد حدود عامل الإزاحة Δ^i، لكل $i=1,2,3,4,5$ أمكن تصميم جدول يقوم بعملية احتساب سريعة لمفكوك Δ^i، لكل $i=1,2,\cdots,p$ والتوصل إلى القيم العددية $Z_{i,j}$ للمعاملات a_i المرتبطة بعامل الإزاحة Δ^i ولكل $i=1,2,\cdots,p$ وموضحة بالجدول رقم (1) الآتي: لكل $i=1,2,\cdots,p$ ، ولكل $j=1,2,\cdots,i$.

جدول رقم (1)

احتساب معاملات مفكوك المعامل الفرقي $\Delta(\Delta^0 ، \Delta^1 ، \Delta^2 ، ...)$

X_{n-j}

$a_i\Delta^i$	X_n	X_{n-1}	X_{n-2}	X_{n-3}	X_{n-4}	X_{n-5}	.....	X_{n-P}
$a_0\Delta^0$	$Z_{0,0}=1$	0	0	0	0	0	.....	0
$a_1\Delta^1$	$Z_{1,0}=1$	-1	0	0	0	0	.....	0
$a_2\Delta^2$	$Z_{2,0}=1$	-2	1	0	0	0	.....	0
$a_3\Delta^3$	$Z_{3,0}=1$	-3	3	-1	0	0	.....	0
$a_4\Delta^4$	$Z_{4,0}=1$	-4	6	-4	1	0	.....	0
$a_5\Delta^5$	$Z_{5,0}=1$	-5	10	-10	5	-1	.....	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

حيث تمثل الأعمدة معاملات X_n،X_{n-1}،... والصفوف المعامل الفرقي Δ^0 ، Δ^1 ، Δ^2 ، ... وان $\Delta=(1-B)$ و B عامل الإزاحة الخلفي(Backward Shift Operator)الذي عرف سابقا $B^r X_n = X_{n-r}$. وأن $Z_{i,j}$ يمثل بالمعادلة الآتية:

$$Z_{i,j} = \sum_{f=i-1}^{0} \left| Z_{f,j-1} \right|$$

وبالاستمرار بطريقة مشابهة يتم الحصول على AR(p) حيث يمكن تمثيل عملية العكس بالجدول رقم (2) الآتي الذي من خلاله يمكن تعميم عملية العكس لتشمل كل p .

لكل $i = 1,2,\cdots,p$ ، ولكل $j = 1,2,\cdots,i$.

جدول رقم (2)

تمثيل وتعميم عملية العكس

Δ^j

a_i AR(p)	$\Delta^0 x_n$	$\Delta^1 x_n$	$\Delta^2 x_n$	$\Delta^3 x_n$	$\Delta^4 x_n$	$\Delta^5 x_n$	.....
a_0	$Z_{0,0}$	0	0	0	0	0	.....
a_1	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$	0	0	0	0	.....
a_2	$Z_{2,0}$	$Z_{2,1}$	$Z_{2,2}$	0	0	0	.....
a_3	$Z_{3,0}$	$Z_{3,1}$	$Z_{3,2}$	$Z_{3,3}$	0	0	.....
a_4	$Z_{4,0}$	$Z_{4,1}$	$Z_{4,2}$	$Z_{4,3}$	$Z_{4,4}$	0	.....
a_5	$Z_{5,0}$	$Z_{5,1}$	$Z_{5,2}$	$Z_{5,3}$	$Z_{5,4}$	$Z_{5,5}$	.....
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

من خلال إيجاد نماذج مستمرة الزمن باستخدام عملية العكس استنتجنا من الجدولين(1) و(2) ما يأتي :

$$\left.\begin{array}{lr} 1)\ Z_{i,j}=-i & \forall\ j=1 \\ 2)\ Z_{i,j}=(-1)^{i} & \forall\ i=j \\ 3)\ Z_{i,j}=1 & \forall\ j=0 \\ 4)\ Z_{i,j}=\left|Z_{i-1,j}\right|+\left|Z_{i-1,j-1}\right| & \forall\ i>1\ \&\ j\geq 2 \\ 5)\ Z_{i,j}=0 & \forall\ i<j\ \&\ j\geq 1 \\ 6)\ a_0=1 & \end{array}\right\} \quad \ldots(4)$$

وبالاستناد إلى الجدول رقم (1) والاستنتاجات في (4) يمكن الحصول على الصيغة العامة الآتية لعملية العكس من نماذج متقطعة إلى نماذج مستمرة:

الصيغة العامة لإيجاد $\mathrm{AR}(p)$ في زمن مستمر هي :

$$AR(p):\sum_{i=0}^{P} S_i = y_n \qquad \ldots(5)$$

حيث

$$S_i = a_i \sum_{j=0}^{i} Z_{i,j}\Delta^j X_n \qquad \ldots(6)$$

وأن

$$Z_{i,j} = \sum_{f=i-1}^{0}\left|Z_{f,j-1}\right| \qquad \ldots(7)$$

وبقسمة طرفي المعادلة (5) على المقدار($\Delta^P x_n$معامل*$(\Delta t)^P$) ، نتوصل إلى الصيغة العامة AR(p). ولأجل التحقق من أن الصيغة العامة لإيجاد $\mathrm{AR}(p)$ صحيحة ، سنقوم بتطبيقها على نموذجي الانحدار الذاتي في زمن متقطع من الرتبتين الأولى والثانية .

أولاً : نموذج الانحدار الذاتي في الزمن المستمر من الرتبة الأولى $\mathrm{AR}(1)$:

ليكن نموذج الانحدار الذاتي في الزمن المتقطع من الرتبة الأولى (المعادلة الفرقية) بالشكل الآتي:

$$X_n - a_1 X_{n-1} = Y_n \qquad \ldots(8)$$

وبتطبيق المعادلة (5) عندما $p=1$ نحصل على

$$AR(1):\sum_{i=0}^{1} S_i = Y_n$$

$$S_0 + S_1 = Y_n \qquad \ldots(9)$$

وبتطبيق المعادلتين (4) و(6) على المعادلة (9) نحصل على:

$$S_0 = a_0 \sum_{j=0}^{0} Z_{0,j} \Delta^j X_n = a_0 Z_{0,0} \Delta^0 X_n$$

$$\therefore S_0 = X_n$$

نقوم الآن بإيجاد S_1 كالآتي :-

$$S_1 = a_1 \left(Z_{1,0} \Delta^0 X_n + Z_{1,1} \Delta^1 X_n \right)$$

وبتطبيق المعادلتين (4) و(6) لإيجاد S_1من معادلة (9) نحصل على:

$$S_1 = a_1 X_n - a_1 \Delta X_n$$

وبتعويض قيم S_i ، لكل $i = 0,1$ في معادلة (9) نحصل على الآتي :

$$AR(1): X_n + a_1 X_n - a_1 \Delta X_n = Y_n$$

$$AR(1): (1 + a_1) X_n - a_1 \Delta X_n = Y_n \qquad ...(10)$$

وبقسمة طرفي المعادلة (10)على المقدار$(-a_1 \Delta t)$ ، نتوصل إلى الصيغة العامة AR(1) الآتية:

$$\frac{\Delta X_n}{\Delta t} - \frac{(1 + a_1)}{a_1 \Delta t} \cdot X_n = -\frac{Y_n}{a_1 \Delta t}$$

والتي تمثل معادلة الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى في الزمن المستمر.

ثانيا: معادلة الانحدار الذاتي في الزمن المستمر من الرتبة الثانية AR(2) :

لتكن لدينا المعادلة الفرقية من الرتبة الثانية:

$$X_n + a_1 X_{n-1} + a_2 X_{n-2} = Y_n \qquad \ldots(11)$$

وبتعويض $p = 2$ في المعادلة (5)نحصل على:

$$AR(2): \sum_{i=0}^{2} S_i = Y_n$$

$$S_0 + S_1 + S_2 = Y_n \qquad \ldots(12)$$

فيAR(1) وجدنا كلا من S_0 وS_1 وبتطبيق المعادلتين (4) ،(6) و(7) على المعادلة (12) نحصل على S_2:

$$S_2 = a_2 \left((-1)^0 Z_{2,0} \Delta^0 X_n + (-1)^1 Z_{2,1} \Delta^1 X_n + (-1)^2 Z_{2,2} \Delta^2 X_n \right)$$

$$S_2 = a_2 X_n - 2a_2 \Delta X_n + a_2 \Delta^2 X_n$$

$$\therefore \sum_{i=0}^{2} S_i = X_n + a_1 X_n - a_1 \Delta X_n + a_2 X_n - 2a_2 \Delta X_n + a_2 \Delta^2 X_n$$

$$\Rightarrow a_2 \Delta^2 X_n - (a_1 + 2a_2) \Delta X_n + (1 + a_1 + a_2) X_n$$

وبتعويض قيم S_i ، لكل $i = 0,1,2$ في معادلة (12)نحصل على الآتي :

$$AR(2): a_2 \Delta^2 X_n - (a_1 + 2a_2) \Delta X_n + (1 + a_1 + a_2) X_n = Y_n \qquad \ldots(13)$$

وبقسمة طرفي المعادلة (13) على المقدار $(a_2*(\Delta t)^2)$ ، نتوصل إلى الصيغة العامة AR(2) الآتية:

$$\frac{\Delta^2 X_n}{(\Delta t)^2} - \frac{(a_1+2a_2)}{a_2\Delta t}\cdot\frac{\Delta X_n}{\Delta t} + \frac{(1+a_1+a_2)}{a_2(\Delta t)^2}\cdot X_n = \frac{Y_n}{a_2(\Delta t)^2}$$

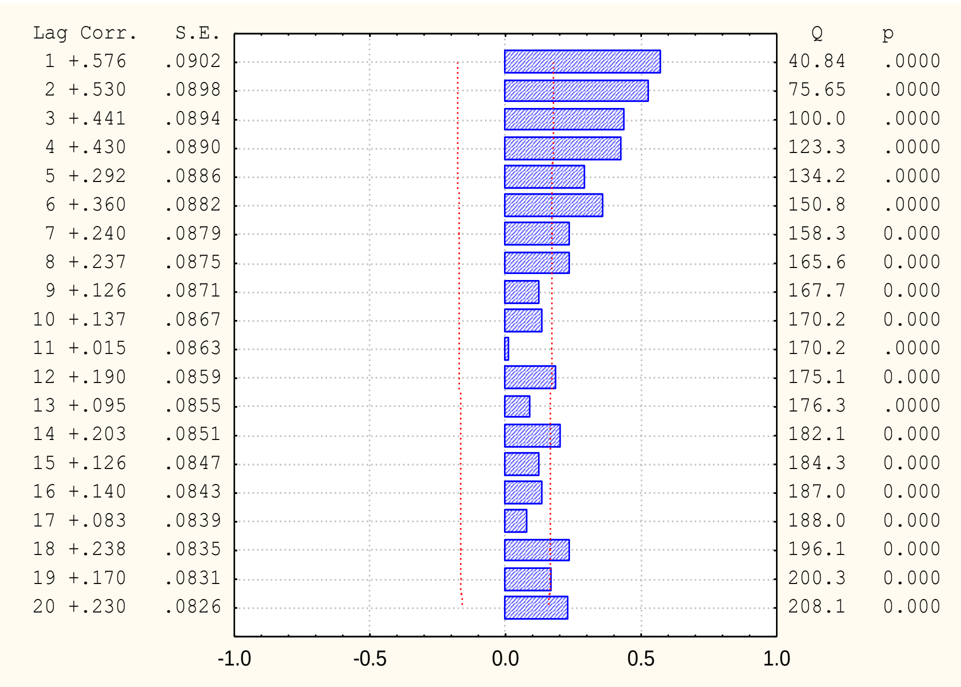
والتي تمثل معادلة الانحدار الذاتي من الرتبة الثانية في الزمن المستمر وهي مطابقة للمعادلة المعكوسة للباحث (Priestley).

2. الجانب التطبيقي Practical Part

المقدمة:

تم في هذا المبحث دراسة السلسلة الزمنية لالتهاب الكبد الفايروسي نمط -B- التي تمثل أعداد المصابين بهذا المرض حيث تم الحصول على البيانات من مصرف الدم الرئيسي/ شعبة الفايروسات ، وللسنوات 1997-2006 وعلى مستوى الأشهر.

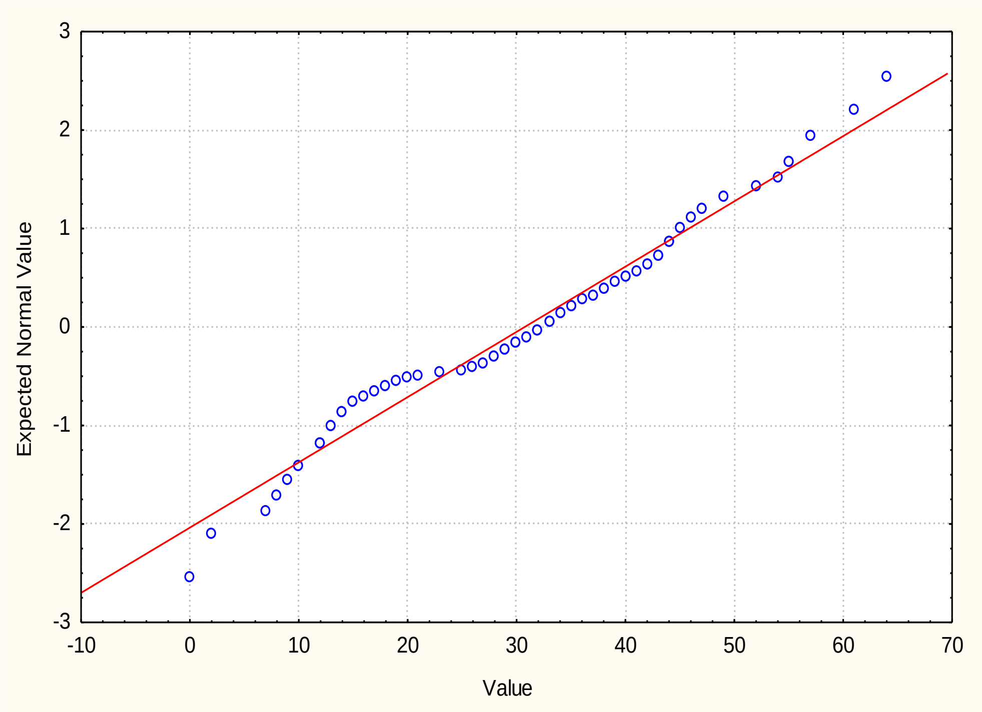
والشكل رقم (1) يمثل دالة الارتباط الذاتي للسلسلة المدروسة.



الشكل رقم (1)

دالة الارتباط الذاتي للسلسلة الزمنية لعدد الإصابات بمرض التهاب الكبد الفايروسي نمط -B- للفترة (1997-2006)

ومن ملاحظة رسم دالة الارتباط الذاتي [الشكل رقم (1)] نجد أن معظم معاملات الارتباط الذاتي تقع خارج القيد $\mp\frac{1.96}{\sqrt{n}}$ حيث n يمثل عدد البيانات مما يشير إلى ان السلسلة مترابطة لكنها قريبة من التوزيع الطبيعي[لاحظ شكل رقم (2)].



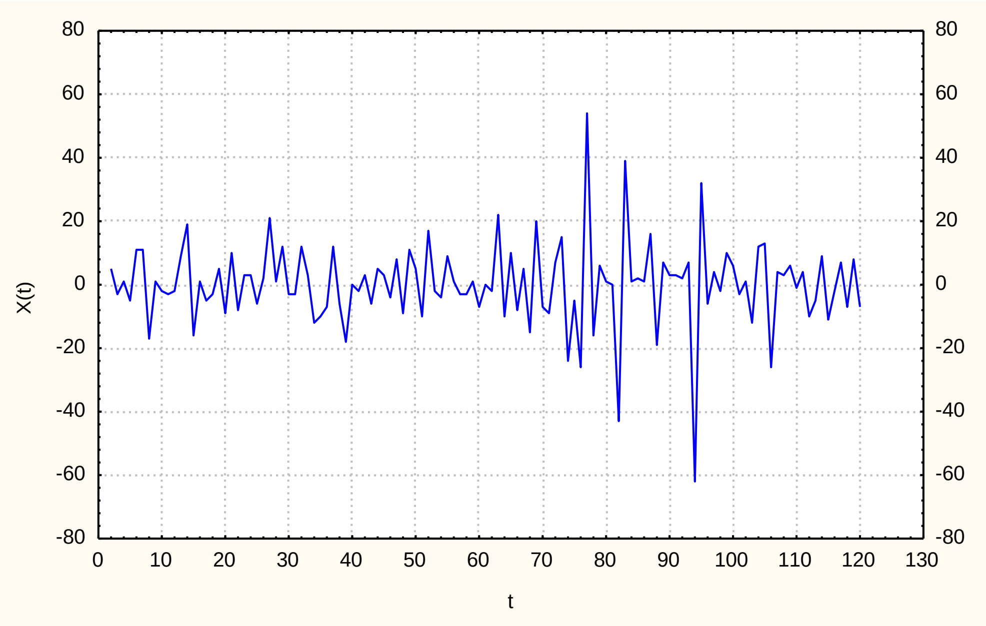
الشكل رقم (2)

رسم الطبيعية للسلسلة الزمنية لعدد الإصابات بمرض التهاب الكبد الفايروسي

نمط -B- للفترة (1997-2006)

النمذجة: Modeling

بما أن السلسلة غير مستقرة، تم أخذ الفرق الأول (First Difference) للسلسلة الأصلية (لاحظ الشكل رقم (3)) لتحويلها إلى سلسلة مستقرة، ولزيادة في التفاصيل لاحظ [2].



الشكل رقم (3)

الرسم البياني للسلسلة الزمنية المحورة لعدد الإصابات بمرض التهاب الكبد الفايروسي نمط-B-للفترة (1997-2006)

وقد تم الاعتماد على طريقة Box & Jenkines في تحليل ونمذجة السلسلة الزمنية لعدد الإصابات بالمرض المتمثلة بالمراحل الأساسية الثلاث (التشخيص-Identification ، التقدير-Estimation ، الفحوص التشخيصية-Diagnostic Checking)[4].

وباستخدام البرنامج الإحصائي الجاهز (Statistica - 99) لغرض تقدير معلمات النموذج المشخص بطريقة الإمكان الأعظم التقريبية (Approximate Maximum Likelihood Method) ولزيادة في التفاصيل لاحظ [4]، حصلنا على نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى AR(1) للسلسلة الزمنية وباعتماد كل من معيار AIC وBIC (Bayesian Information Criterion) حيث ان:

$$AIC(m) = n\,ln\left(\sigma_z^2\right) + 2m$$

m يمثل عدد المعلمات (parameters) في النموذج

n عدد البيانات

σ_z^2 تباين البواقي للنموذج Residual variance.

إذ ان الرتبة الأحسن للنموذج يتم انتخابها من خلال أقل قيمة لـ $AIC(m)$.

أما معيار BIC وهو تطوير لمعيار AIC والذي يسمى Bayesian Information Criterion ويعرف كما يلي[10] :

$$BIC(m) = n\,ln(\sigma_z^2) + m\,ln(n)$$

نلاحظ أن للنموذج AR(1) أقل قيمة ضمن المعيارين أعلاه لذا تم اختياره لتمثيل السلسلة، والجدول الآتي يبين النماذج التي تم ملاءمتها للسلسلة وفق المعايير AIC ،BIC و MSE.

جدول رقم (3)

النماذج الرياضية الملائمة للسلسلة ARIMA(p,d,q)

p	d	MSE	AIC	BIC
1	1	144	550	556
2	1	140	552	560
3	1	136	554	565
4	1	137	556	570
5	1	131	558	574
6	1	132	560	579

ويعبر عن النموذج AR(1) بالصيغة الآتية:

$$X_t - 0.4498X_{t-1} = Z_t \qquad \ldots(14)$$
$$(0.08269)$$
$$BIC = 556$$

2.1 عكس النموذج في زمن متقطع إلى نموذج في زمن مستمر

باستخدام الجدولين (1 و 2) والعلاقات (4، 5، 6 و7) ، وبما أن النموذج الذي حصلنا عليه هو نموذج انحدار ذاتي في زمن متقطع، حصلنا على النموذج الآتي والذي يمثل نموذج انحدار ذاتي في زمن مستمر:

$$X^{(1)}(t) + \alpha_1 X(t) = \in(t)$$

وبفرض أن $\Delta t = 0.1$ ، ومن المعادلة (14) نحصل على القيم الآتية:

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = -0.4498$$

حيث

$$\alpha_1 = \frac{(1+a_1)}{a_1(\Delta t)} = -12.2321$$

$$\in(t) = \frac{Y_n}{a_1(\Delta t)}$$

ان شرط المُراوحة(Staionarity) للنموذج المقترح AR(1) في زمن متقطع هو أن يكون $|\mu_1| < 1$.

المعادلة المميزة للنموذج AR(1) في زمن متقطع لها الشكل الآتي:

$\lambda - 0.4498 = 0$ حيث يمثل الجذر $\lambda_1 = \mu_1$

فنحصل على: $\lambda_1 = 0.4498$

نلاحظ ان $|\mu_1| < 1$ مما يشير إلى ان السلسلة الممثلة بالنموذج AR(1) تعتبر مستقرة.

ولاختبار مُراوحة نموذج الانحدار الذاتي في زمن مستمر.

نجد المعادلة المميزة للنموذج AR(1) في الزمن المستمر التي لها الشكل الآتي:

$$\lambda - 12.2321 = 0$$

حيث $\lambda_1 = \mu_1$ يمثل الجذر

فنحصل على :

$$\lambda_1 = 12.2321$$

وان شرط المُراوحة للنموذج المعكوس AR(1) في زمن مستمر هو أن يكون الجزء الحقيقي لجذر المعادلة مقدار سالب أي ان $R(\mu_1) < 0$.

حيث نلاحظ ان الجزء الحقيقي لجذر المعادلة ليس مقداراً سالباً مما يشير إلى ان النموذج المعكوس غير مستقر.

نستنتج من خلال دراستنا أعلاه مايأتي:

1. إن عكس نماذج الانحدار الذاتي من زمن متقطع إلى نماذج انحدار ذاتي في زمن مستمر هي عملية ليست سهلة ولكنها ليست مستحيلة حيث تم الحصول على تعميمها إلى الرتبة p.
2. ان شرط المُراوحة (Staionarity) في النموذج المحول هي ليست أكيدة, أي إذا كان نموذج الانحدار الذاتي في زمن متقطع (يحقق شرط المُراوحة) ففي النموذج المحول (المعكوس) ليس بالضرورة ان يحقق شروط المُراوحة.

المصادر

[1] التهاب الكبد الفيروسي، (2005)، وزارة الصحة وبالتعاون مع منظمة الصحة العالمية، العراق.

[2] الشيخ عيسى، نهال هاشم. (2009)، "عكس نماذج الانحدار الذاتي المتقطعة إلى مستمرة"، رسالة ماجستير غير منشورة، كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل، العراق.

[3] العبيدي، عبد الغفور جاسم. (1989): "تحليل ونمذجة السلسلة الزمنية لدرجات الحرارة في مدينة الموصل"، رسالة ماجستير غير منشورة، كلية العلوم، جامعة الموصل، العراق.

[4] العجيلي، سندس نوري. (2002): "بناء نموذج تصادفي لعدد الإصابات بمرض التدرن الرئوي في محافظة صلاح الدين للفترة (1989-2000)"، رسالة ماجستير غير منشورة ، كلية التربية للبنات، جامعة تكريت، العراق.

[5] المعماري، محمد دواج. (2007): " دراسة فايروسية ومناعية على مرضى التهاب الكبد الفايروسي"، أطروحة دكتوراه غير منشورة، كلية العلوم، جامعة الموصل، العراق.

[6] Brockwell, A., E. & Brockwell, P. J., (1999), "A Class of Non-Embeddable ARMA processes", Journal of Time Series Analysis, vol. 20, No., 5, PP. 483-486.

[7] He, S., W., & Wang, J., G., (1989), "On embedding a discrete-parameter ARMA model in a continuous-parameter ARMA model", Journal of Time Series Analysis, vol. 10, No. 4, PP. 315-323.

[8] Priestley, M. B., (1981): "Spectral Analysis and Time Series volume 1 univariate series", Academic Press, London.

[9] Tong, H. & Chan, K., S., (1987), "A note on embedding a discrete parameter ARMA model in a continuous parameter ARMA model", Journal of Time Series Analysis, vol. 8, PP. 277-281.

[10] Wei, William W.S. (1990), "Time series Analysis: Univariate and Multivariate Method.", Adison-wesley publishing company Inc.