The Basis Number of Symmetric Difference of K_2 with Some Ladder Graphs

Rasha S. Hasan

sallal-rasha@uomousl.edu.iq

Ahmed M. Ali

ahmedgraph@uomousl.edu.iq

Department of Mathematics,
College of Computer Science and Mathematics,
University of Mosul, Mosul, Iraq

Received on: 08/09/2013

Accepted on: 24/11/2013

ABSTRACT

The basis number of a graph G is defined to be the least integer k such that G has a k -fold cycle basis. We investigate the basis number of symmetric difference of K_2 with a ladder graph L_m , a circular ladder, and a Möbius ladder.

Keywords: Basis Number, Symmetric Difference, K_2 Graph, Ladder Graph.

العدد الأساس للفرق التناظري للبيان K_2 مع بعض بيانات السلالم

رشا صلال حسن

أحمد محمد علي

قسم الرياضيات، كلية علوم الحاسوب والرياضيات
جامعة الموصل، الموصل، العراق

تاريخ قبول البحث: ٢٠١٣/١١/٢٤

تاريخ استلام البحث: ٢٠١٣/٠٩/٠٨

المخلص

يعرف العدد الأساس $b(G)$ لبيان G بأنه أصغر عدد صحيح موجب k بحيث إن هنالك قاعدة ذات ثنية k لفضاء الدارات للبيان G . في هذا البحث قمنا بحساب العدد الأساس للفرق التناظري لبيان K_2 مع بيان السلم L_m ، وبيان سلم الدارة CL_m ، وسلم موبيس ML_m .
الكلمات المفتاحية: العدد الأساس، الفرق التناظري، بيان K_2 ، بيان السلالم.

1. المقدمة

في السنوات الأخيرة زاد الاهتمام بدراسة العدد الأساس لبعض البيانات الخاصة ولبعض العمليات المعرفة على البيانات [1,2,3,6]، بالنسبة للمصطلحات غير المعرفة راجع المصدرين [4] و [5]. ليكن G بياناً متصلاً ومنتهاً، حافته $e_1, e_2, \dots, e_q$ فإن لكل مجموعة جزئية S من حافات G يوجد متجه $(a_1, a_2, \dots, a_q)$ يقابل S بحيث إن $a_i = 1$ إذا كان $e_i \in S$ و $a_i = 0$ إذا كان $e_i \notin S$ لكل $i=1, 2, \dots, q$. هذه المتجهات تكوّن فضاء متجهات ذات البعد q على الحقل Z_2 ، ويطلق عليه فضاء المتجهات المقترن مع البيان G ويرمز له بالرمز $(Z_2)^q$. المتجه الصفري من $(Z_2)^q$ يرمز له بالرمز $\vec{0}$. متجهات $(Z_2)^q$ التي تقابل دارات G تولد فضاء متجهات جزئي يطلق عليه فضاء الدارات للبيان G ويرمز له $C(G)$. كل متجه في $C(G)$ يمثل إما دارة في G أو اتحاد دارات منفصلة عن بعضها بالنسبة للحافات، ومن النتائج المعروفة في نظرية البيان أن بعد فضاء الدارات لبيان متصل G هو $q-p+1$ إذ إن p هو عدد رؤوس البيان G و q هو عدد حافته.

إن طريقة إيجاد قاعدة لفضاء الدارات $C(G)$ هي على النحو الآتي :

لتكن T أية شجرة مولدة في G ؛ فإذا كانت e حافة تنتمي إلى $G-T$ عندئذ يكون البيان الجزئي $T+e$ محتوياً بالضبط على دائرة واحدة يرمز لها بـ C_e . واضح أن عدد هذه الدارات C_e هو $q-p+1$ ؛ إذ إن $(G-T) \in C(G)$ وأنها تشكل قاعدة لفضاء الدارات $C(G)$.

ويقال للقاعدة B لفضاء الدارات $C(G)$ إنها ذات ثنية k - $(k\text{-fold})$ إذا كانت كل حافة من حافات G لا تظهر في أكثر من k من الدارات في القاعدة B .

ويعرف العدد الأساس $(basis\ number)$ [9] لبيان G بأنه أصغر عدد صحيح موجب k بحيث إن $C(G)$ له قاعدة ذات ثنية k - ؛ وهذه القاعدة تسمى القاعدة المطلوبة $(required\ basis)$ ويرمز للعدد الأساس للبيان G بالرمز $b(G)$.

استطاع مكلين في عام 1937 أن يعطي القيد الأعلى للعدد الأساس عندما يكون البيان مستوياً [8] .

تعريف (1.1) [7]: الفرق التناظري لبيانين G و H يرمز لها بالرمز $G\Delta H$ ، ويعرف بأنه البيان الذي مجموعة رؤوسه هي $V(G) \times V(H)$ ، ومجموعة حافته هي

$$E(G\Delta H) = \{(u_1, u_2) (v_1, v_2) : u_1 v_1 \in E(G) \text{ or } u_2 v_2 \in E(H) \text{ but not both} \}.$$

إن عدد حافات البيان $G\Delta H$ هو

$$|E(G\Delta H)| = |E(G)| \times |V(H)|^2 + |E(H)| \times |V(G)|^2 - 4 |E(G)| \times |E(H)|$$

$$= q_1 p_2^2 + q_2 p_1^2 - 4 q_1 q_2.$$

إذ إن p_1 و p_2 عدد رؤوس البيان G و H على التوالي و q_1 و q_2 عدد حافات البيان G و H على التوالي أيضاً.

بيان السلم $(ladder\ graph)$ هو البيان الذي مجموعة رؤوسه هي $\{u_i, v_i : i=1, 2, \dots, m\}$ ، ومجموعة حافته هي $\{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1} : i=1, 2, \dots, m-1\} \cup \{u_i v_i : i=1, 2, \dots, m\}$ ، ويرمز له L_m ، لاحظ الشكل 1.1.

الشكل 1.1 بيان السلم L_m

بيان سلم الدارة $(circular\ ladder)$ وهو البيان الناتج من بيان السلم L_m بإضافة الحافتين $u_1 u_m$ و $v_1 v_m$ ويرمز له CL_m ، لاحظ الشكل 2.1 .

الشكل 2.1 بيان سلم الدارة CL_m

بيان سلم موبيس (**Möbius ladder**) هو البيان الناتج من بيان السلم L_m بإضافة الحافتين u_1v_m و u_mv_1 ويرمز له ML_m ، لاحظ الشكل 3.1.

الشكل 3.1 بيان سلم موبيس ML_m

2 . العدد الأساس للفرق التناظري لبيان K_2 مع بيان السلم L_m

نجد في هذا البند العدد الأساس للفرق التناظري لبيان K_2 مع بيان السلم L_m . نلاحظ أن عدد رؤوس البيان $K_2 \Delta L_m$ هو $4m$ وعدد حافته هي $4m^2$ ، وأن

$$\dim C(K_2 \Delta L_m) = (2m-1)^2.$$

سوف نقوم بإعادة ترميز رؤوس بيان السلم المبين في الشكل 1.1 ، فإذا كانت m فردية فالشكل 1.1 يصبح بالشكل 1.2 وإذا كانت m زوجية فالشكل 1.1 يصبح بالشكل 2.2 .

الشكل 1.2، إذ إن m عدد فردي .

الشكل 2.2، إذ إن m عدد زوجي .

من الشكل 1.2 والشكل 2.2 نرمز للرأس u_i بالرمز $i-1$ ، لكل $i=1,2,\dots,2m$ ، ونرمز لرأس K_2 بالرمز $0,1$ عندئذ تصبح رؤوس $K_2 \Delta L_m$ مجزأة إلى

$$\{(0,0), (0,1), \dots, (0,2m-1)\} \cup \{(1,0), (1,1), \dots, (1,2m-1)\}$$

وأخيراً ، نرمز للرأس $(0,j)$ بالرمز x_{j+1} وللرأس $(1,j)$ بالرمز y_{j+1} لكل $j=0,1,2,\dots,2m-1$.

مبرهنة (1.2): لكل $m \geq 7$ فإن $b(K_2 \Delta L_m) \leq 4$.

البرهان: نأخذ مجموعة الدارات الآتية في البيان $K_2 \Delta L_m$ على النحو الآتي:

$$B = B(K_2 \Delta L_m) = \bigcup_{i=1}^{15} B_i$$

إذ إن

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \{ x_i y_j x_{i+1} y_{j+1} x_i ; i=1,3 \text{ and } j=i+4, i+5, \dots, 2m-1 \}, \\
 B_2 &= \{ x_{2m-1} y_j x_{2m} y_{j+1} x_{2m-1} ; j=1,2, \dots, 2m-5 \}, \\
 B_3 &= \{ x_i y_j x_{i+1} y_{j+1} x_i ; i=2,4 \text{ and } j=i+5, i+6, \dots, 2m-1 \}, \\
 B_4 &= \{ x_i y_j x_{i+1} y_{j+1} x_i ; i=2m-3, 2m-2 \text{ and } j=1,2, \dots, 2m-7 \}, \\
 B_5 &= \{ x_{2m-4} y_j x_{2m-3} y_{j+1} x_{2m-4} ; j=1,2, \dots, 2m-9 \}, \\
 B_6 &= \{ x_i y_j x_{i+1} y_{j+1} x_i ; i=5,7, \dots, 2m-5 \text{ and } j=1,2, \dots, i-4, i+4, i+5, \dots, 2m-1 \}, \\
 B_7 &= \{ x_i y_j x_{i+1} y_{j+1} x_i ; i=6,8, \dots, 2m-6 \text{ and } j=1,2, \dots, i-5, i+5, i+6, \dots, 2m-1 \}, \\
 B_8 &= \{ x_i x_{i+1} y_{i+1} y_i x_i ; i=1,2, \dots, 2m-1 \}, \\
 B_9 &= \{ x_i x_{i+1} y_{i+3} y_{i+2} x_i, y_i y_{i+1} x_{i+3} x_{i+2} y_i ; i=1,2, \dots, 2m-3 \}, \\
 B_{10} &= \{ x_{2m} y_i y_{i+1} x_{2m}, y_{2m} x_i x_{i+1} y_{2m} ; i=2,4, \dots, 2m-6 \}, \\
 B_{11} &= \{ x_1 y_i x_{i+2} y_1 x_{i+1} y_{i+1} x_1 ; i=6,8, \dots, 2m-4 \}, \\
 B_{12} &= \{ x_1 y_i y_{i+3} x_1, y_1 x_i x_{i+3} y_1 ; i=3,5, \dots, 2m-3 \} \cup C_1, \\
 B_{13} &= \{ x_{2m} y_i y_{i+3} x_{2m}, y_{2m} x_i x_{i+3} y_{2m} ; i=1,3, \dots, 2m-5 \}, \\
 B_{14} &= \{ x_i y_{i+2} y_{i+5} x_{i+3} x_i ; i=1,3, \dots, 2m-5 \}, \\
 B_{15} &= \{ x_i y_{i+2} y_{i+3} x_{i+3} x_i, y_i x_{i+2} x_{i+3} y_{i+3} y_i ; i=1,3, \dots, 2m-3 \} \cup (\cup_{i=2}^4 C_i).
 \end{aligned}$$

إذ إن

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \{ x_1 y_{2m-1} x_{2m-1} y_1 x_1 \}, \\
 C_2 &= \{ x_2 x_3 y_1 y_4 x_2 \}, \\
 C_3 &= \{ x_1 x_4 y_2 y_1 x_1 \}, \\
 C_4 &= \{ y_1 y_4 x_2 x_1 y_1 \}.
 \end{aligned}$$

من الواضح أن

$$\begin{aligned}
 |B_1| &= 4m-12, & |B_2| &= 2m-5, \\
 |B_3| &= 4m-16, & |B_4| &= 4m-14, \\
 |B_5| &= 2m-9, & |B_6| &= (m-4)(2m-8) = 2m^2 - 16m + 32, \\
 |B_7| &= (m-5)(2m-10) = 2m^2 - 20m + 50, & |B_8| &= 2m-1, \\
 |B_9| &= 4m-6, & |B_{10}| &= 2m-6, \\
 |B_{11}| &= m-4, & |B_{12}| &= 2m-3, \\
 |B_{13}| &= 2m-4, & |B_{14}| &= m-2, \\
 |B_{15}| &= 2m+1, \\
 \therefore |B(K_2 \Delta L_m)| &= \sum_{i=1}^{15} |B_i| = (2m-1)^2 = \dim C(K_2 \Delta L_m).
 \end{aligned}$$

الآن نبرهن أن $B(K_2 \Delta L_m)$ مستقلة خطياً، من الواضح أن $\cup_{i=1}^7 B_i$ مستقلة خطياً؛ وذلك لأنها تشكل قاعدة جزئية من فضاء $C(K_{2m,2m})$ المكونة من كل الدارات بالشكل $x_i y_j x_{i+1} y_{j+1} x_i$ لكل $[9]$ $i, j=1,2, \dots, 2m-1$ ، كما أن B_8 مستقلة خطياً؛ وذلك لأنها تمثل حدود بعض أوجه البيان $K_2 \times P_{2m}$ الذي هو بيان جزئي من $K_2 \Delta L_m$ ، كما أن B_9 مجموعة مستقلة خطياً؛ وذلك لأنها تمثل حدود أوجه البيان الجزئي المستوي وكما موضح في الشكل (3.2)، كذلك B_{10} مستقلة خطياً للسبب السابق نفسه، وكما موضح في الشكل (4.2)، وأن $B_8 \cup B_9$ مستقلة خطياً؛ وذلك لأن B_8 تحوي على حافات بالشكل $x_i y_i$ لكل قيم $i=1,2,3, \dots, 2m$ التي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في B_9 ، وأن $B_{10} \cup (B_8 \cup B_9)$ مستقلة خطياً؛ وذلك لأن B_{10} تحوي على حافات بالشكل $x_{2m} y_i$ أو $y_{2m} x_i$ لكل قيم $i=2,3, \dots, 2m-5$ التي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في $B_8 \cup B_9$ ، كذلك دارات كل من B_{11} و B_{12} و B_{13} و B_{14} مستقلة خطياً؛ وذلك لأنها تمثل دارات منفصلة بالنسبة للحافات، كما أن $UB_{11} \cup (B_8 \cup B_9 \cup B_{10})$ مستقلة خطياً؛ وذلك لأن B_{11} تحوي على حافات بالشكل $x_1 y_i$ لكل قيم $i=6,7, \dots, 2m-3$ التي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في $B_9 \cup B_{10}$.

$B_8 \cup B_{15}$ ، كذلك B_{15} مجموعة مستقلة خطياً؛ وذلك لأنه لا يمكن كتابة أحدها كتركيب خطي من الدارات الأخرى، أي: إن أي تركيب خطي من هذه الدارات لا يساوي متجهاً صفرياً، وأن $B_{12} \cup B_{13}$ مستقلة خطياً؛ وذلك لأن B_{12} تحوي على حافات بالشكل x_1y_i أو y_1x_i لكل قيم $i=3,5,6,7,\dots,2m-1$ التي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في B_{13} ، وأن $B_{14} \cup B_{15}$ مستقلة خطياً؛ وذلك لأن B_{15} تحوي على حافات بالشكل $x_i y_i$ لكل قيم $i=4,6,\dots,2m$ التي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في B_{14} ، كما أن $(B_{14} \cup B_{15}) \cup (B_{12} \cup B_{13})$ مستقلة خطياً؛ وذلك لأن أي تركيب خطي للدارات في $B_{12} \cup B_{13}$ تحوي على حافات بالشكل $x_{2m} y_i$ أو $y_{2m} x_i$ لكل قيم $i=1,3,4,5,\dots,2m-4$ والتي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في B_{15} ، كذلك $B_{14} \cup B_{15} \cup (B_{12} \cup B_{13} \cup B_{14} \cup B_{15}) \cup (B_8 \cup B_9 \cup B_{10} \cup B_{11})$ مستقلة خطياً؛ وذلك لأن $B_{12} \cup B_{13} \cup B_{14} \cup B_{15}$ تحوي على حافات بالشكل $x_i x_{i+3}$ أو $y_i y_{i+3}$ لكل قيم $i=1,3,5,\dots,2m-3$ والتي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في $B_8 \cup B_9 \cup B_{10} \cup B_{11}$ ، وعليه فإن $U_{i=8}^{15} B_i$ مجموعة مستقلة خطياً، وأخيراً $(U_{i=1}^7 B_i) \cup (U_{i=8}^{15} B_i)$ مجموعة مستقلة خطياً؛ وذلك لأن $U_{i=8}^{15} B_i$ تحوي على حافات بالشكل $x_i x_{i+1}$ أو $y_i y_{i+1}$ لكل قيم $i=1,2,\dots,2m-1$ التي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في $U_{i=1}^7 B_i$ لذلك فإن $U_{i=1}^{15} B_i$ مستقلة خطياً وعليه فإن $B(K_2 \Delta L_m)$ مستقلة خطياً ولهذا تشكل قاعدة للبيان $K_2 \Delta L_m$.

الآن بقي أن نجد الثنية للقاعدة $B = B(K_2 \Delta L_m)$ ، لتكن

$$M_1 = \bigcup_{i=1}^7 B_i , M_2 = \bigcup_{i=8}^{15} B_i$$

ولإيجاد الثنية نقوم بتجزئة حافات البيان $K_2 \Delta L_m$ الى المجموعات الآتية :

$$\begin{aligned} L_1 &= \{ x_i x_{i+1} ; i = 2, 3, \dots, 2m-5, 2m-3 , y_j y_{j+1} ; j = 3, 4, \dots, 2m-5, 2m-3 \} , \\ L_2 &= \{ x_i x_{i+1} ; i = 1, 2m-4, 2m-1 , y_j y_{j+1} ; j = 1, 2, 2m-4, 2m-1 \} , \\ L_3 &= \{ x_{2m-3} x_{2m} , x_{2m-2} x_{2m-1} , y_{2m-2} y_{2m-1} \} , \\ L_4 &= \{ x_i y_i ; i = 1, 4, 6, 8, \dots, 2m-2 \} , \\ L_5 &= \{ x_i y_i ; i = 2, 3, 5 \} , \\ L_6 &= \{ x_i y_i , y_{2m-3} y_{2m} ; i = 7, 9, \dots, 2m-1, 2m \} , \\ L_7 &= \{ x_i y_{i+2} , y_1 x_3 ; i = 1, 2, 3, 5, 7, \dots, 2m-5 \} , \\ L_8 &= \{ x_i y_{i+2} ; i = 4, 6, \dots, 2m-4, 2m-3, 2m-2 , y_j x_{j+2} ; j = 2, 3, 5, 6, \dots, 2m-3 \} , \\ L_9 &= \{ x_1 y_i ; i = 6, 7, \dots, 2m-3 , y_1 x_j ; j = 7, 8, \dots, 2m-2 \} , \\ L_{10} &= \{ x_1 y_i ; i = 5, 2m-2, 2m-1 , y_1 x_j ; j = 5, 6, 2m-1 \} , \\ L_{11} &= \{ x_{2m} y_i , y_{2m} x_i ; i = 3, 4, \dots, 2m-5 \} , \\ L_{12} &= \{ x_{2m} y_2 , y_{2m} x_2 , x_{2m} y_{2m-4} , y_{2m} x_{2m-4} \} , \\ L_{13} &= \{ x_i x_{i+3} , y_i y_{i+3} ; i = 1, 3, \dots, 2m-5 \} , \\ L_{14} &= \{ x_{2m} y_1 , y_{2m} x_1 \} , \\ L_{15} &= \{ y_i x_{i+2} ; i = 4, 2m-2 \} , \\ L_{16} &= E(K_2 \Delta L_m) \setminus \bigcup_{i=1}^{15} L_i . \end{aligned}$$

	$e \in L_1$	$e \in L_2$	$e \in L_3$	$e \in L_4$	$e \in L_5$	$e \in L_6$	$e \in L_7$	$e \in L_8$	$e \in L_9$	$e \in L_{10}$	$e \in L_{11}$	$e \in L_{12}$	$e \in L_{13}$	$e \in L_{14}$	$e \in L_{15}$	$e \in L_{16}$
$f_{M_1}(e)$	= 0	= 0	= 0	= 0	= 0	= 0	= 0	= 0	= 2	≤ 2	= 2	≤ 2	= 0	= 1	= 0	≤ 4
$f_{M_2}(e)$	= 4	= 3	= 2	= 4	= 2	= 3	= 4	= 3	= 2	= 1	= 2	= 1	= 4	= 2	= 2	= 0
$f_B(e)$	= 4	= 3	= 2	= 4	= 2	= 3	= 4	= 3	= 4	≤ 3	= 4	≤ 3	= 4	= 3	= 2	≤ 4

وعليه فإن الثنية لكل حافة في البيان $K_2 \Delta L_m$ لا تزيد عن 4 في القاعدة $B(K_2 \Delta L_m)$ ، أي إن $b(K_2 \Delta L_m) \leq 4$ وبهذا يتم البرهان . #

3 . العدد الأساس للفرق التناظري لبيان K_2 مع بيان سلم الدارة CL_m

نجد في هذا البند العدد الأساس للفرق التناظري لبيان K_2 مع بيان سلم الدارة CL_m . نلاحظ أن عدد رؤوس البيان $K_2 \Delta CL_m$ هو $4m$ وعدد حافته هي $4m^2$ وأن

$$\dim C(K_2 \Delta CL_m) = (2m-1)^2 .$$

ونلاحظ أن البيان $K_2 \Delta CL_m$ يمكن أن نحصل عليه من بيان $K_2 \Delta L_m$ ، على النحو الآتي:

أولاً: إذا كانت m فردية: نقوم بحذف الحافات $x_1 y_{2m-1}$, $y_1 x_{2m-1}$, $x_2 y_{2m}$, $y_2 x_{2m}$ واستبدالها بالحافات

$$x_1 x_{2m-1} , y_1 y_{2m-1} , x_2 x_{2m} , y_2 y_{2m}$$

ثانياً: إذا كانت m زوجية: نقوم بحذف الحافات $x_1 y_{2m}$, $y_1 x_{2m}$, $x_2 y_{2m-1}$, $y_2 x_{2m-1}$ واستبدالها بالحافات

$$x_1 x_{2m} , y_1 y_{2m} , x_2 x_{2m-1} , y_2 y_{2m-1}$$

مبرهنة (1.3): لكل عدد فردي $m \geq 7$ ، فإن $b(K_2 \Delta CL_m) \leq 4$.

البرهان: إن مجموعة الدارات في البيان $K_2 \Delta CL_m$ تكون على النحو الآتي:

$$B(K_2 \Delta CL_m) = (B(K_2 \Delta L_m) \setminus \bigcup_{i=1}^9 C_i) \cup (\bigcup_{i=1}^9 S_i) .$$

إذ إن $U_{i=1}^9 C_i$ هي الدارات التي تنتمي للقاعدة $B(K_2 \Delta L_m)$ وتحتوي على الحافات $x_1 y_{2m-1}, y_1 x_{2m-1}$ ،
وإن $x_2 y_{2m}, y_2 x_{2m}$

$$\begin{aligned} C_1 &= \{ x_1 y_{2m-2} x_2 y_{2m-1} x_1 \}, & C_2 &= \{ x_1 y_{2m-1} x_2 y_{2m} x_1 \}, \\ C_3 &= \{ x_2 y_{2m-1} x_3 y_{2m} x_2 \}, & C_4 &= \{ x_{2m-2} y_1 x_{2m-1} y_2 x_{2m-2} \}, \\ C_5 &= \{ x_{2m-1} y_1 x_{2m} y_2 x_{2m-1} \}, & C_6 &= \{ x_{2m-1} y_2 x_{2m} y_3 x_{2m-1} \}, \\ C_7 &= \{ x_{2m} y_2 y_3 x_{2m} \}, & C_8 &= \{ y_{2m} x_2 x_3 y_{2m} \}, \\ C_9 &= \{ x_1 y_{2m-1} x_{2m-1} y_1 x_1 \}, \end{aligned}$$

وإن

$$\begin{aligned} S_1 &= \{ x_2 x_{2m} x_{2m-3} y_{2m-1} x_2 \}, & S_2 &= \{ y_2 y_{2m} y_{2m-3} x_{2m-1} y_2 \}, \\ S_3 &= \{ x_1 x_{2m-1} x_{2m-2} y_{2m} x_1 \}, & S_4 &= \{ y_1 y_{2m-1} y_{2m-2} x_{2m} y_1 \}, \\ S_5 &= \{ x_2 y_2 y_3 x_{2m} x_2 \}, & S_6 &= \{ y_2 x_2 x_3 y_{2m} y_2 \}, \\ S_7 &= \{ y_1 y_2 x_{2m-1} y_{2m-1} y_1 \}, & S_8 &= \{ x_1 x_2 y_{2m-1} x_{2m-1} x_1 \}, \\ S_9 &= \{ x_1 y_{2m-2} y_{2m-1} y_1 x_1 \}, \end{aligned}$$

من الواضح أن

$$|B(K_2 \Delta CL_m)| = (2m-1)^2 = \dim C(K_2 \Delta CL_m).$$

الآن نبرهن أن $B(K_2 \Delta CL_m)$ مستقلة خطياً، من الواضح أن $U_{i=1}^9 C_i \setminus B(K_2 \Delta L_m)$ مستقلة خطياً؛ وذلك لأنها قاعدة جزئية من فضاء $C(K_2 \Delta L_m)$ ، وأن $U_{i=1}^9 S_i$ مستقلة خطياً؛ وذلك لأنه لا يمكن كتابة أحدها كتركيب خطي من الدارات الأخرى أي: إن أي تركيب خطي من هذه الدارات لا يساوي متجهاً صفرياً، وأن $U_{i=1}^9 (S_i \cup (C_i \setminus B(K_2 \Delta L_m)))$ تكون مستقلة خطياً؛ وذلك لأن أي تركيب خطي للدارات في $U_{i=1}^9 S_i$ تحوي على حافات بالشكل $x_1 x_{2m-1}$ أو $y_1 y_{2m-1}$ أو $x_2 x_{2m}$ أو $y_2 y_{2m}$ التي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في $U_{i=1}^9 C_i \setminus B(K_2 \Delta L_m)$ وعليه فإن $B(K_2 \Delta CL_m)$ مستقلة خطياً ولذلك فهي قاعدة للبيان $K_2 \Delta CL_m$.

الآن بقي أن نحسب الثنية للقاعدة $B = B(K_2 \Delta CL_m)$ ، لتكن

$$M_1 = B(K_2 \Delta L_m) \setminus U_{i=1}^9 C_i, \quad M_2 = U_{i=1}^9 S_i$$

ولحساب الثنية نقوم بتجزئة حافات البيان $K_2 \Delta CL_m$ وبما أن

$$B(K_2 \Delta CL_m) = (B(K_2 \Delta L_m) \setminus U_{i=1}^9 C_i) \cup (U_{i=1}^9 S_i)$$

إذن سوف نقوم بتجزئة حافات الدارات في $U_{i=1}^9 S_i$ إلى المجموعات الآتية:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{ x_1 x_{2m-1}, y_1 y_{2m-1}, x_2 x_{2m}, y_2 y_{2m} \}, \\ H_2 &= \{ x_1 y_1, y_{2m} y_{2m-3}, x_1 y_{2m-2} \}, \\ H_3 &= \{ x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; i = 1, 2 \}, \\ H_4 &= \{ x_i y_{i+2}, y_i x_{i+2}; i = 2m-3, 2m-2 \}, \\ H_5 &= \{ x_{2m} y_i, y_{2m} x_i; i = 1, 3 \}, \\ H_6 &= \{ x_i y_i; i = 2, 2m-1 \}, \\ H_7 &= \{ x_2 y_{2m-1}, y_2 x_{2m-1} \}, \\ H_8 &= \{ x_{2m-2} x_{2m-1}, y_{2m-2} y_{2m-1}, x_{2m} x_{2m-3} \}, \\ H_9 &= E(K_2 \Delta CL_m) \setminus U_{i=1}^9 H_i. \end{aligned}$$

	$e \in H_1$	$e \in H_2$	$e \in H_3$	$e \in H_4$	$e \in H_5$	$e \in H_6$	$e \in H_7$	$e \in H_8$	$e \in H_9$
$f_{M_1}(e)$	= 0	≤ 3	≤ 3	≤ 3	≤ 3	= 2	= 1	= 2	≤ 4
$f_{M_2}(e)$	≤ 3	= 1	= 1	= 1	= 1	= 2	= 2	≤ 2	= 0
$f_B(e)$	≤ 3	≤ 4	≤ 4	≤ 4	≤ 4	= 4	= 3	≤ 4	≤ 4

وعليه فإن الثنية لكل حافة في البيان $K_2 \Delta CL_m$ لا تزيد عن 4 في القاعدة $B(K_2 \Delta CL_m)$ ، أي أن:

$b(K_2\Delta CL_m) \leq 4$ وبهذا يتم البرهان.

مبرهنة (3.3): لكل عدد زوجي $m \geq 8$ فإن $b(K_2 \Delta CL_m) \leq 4$.

البرهان: إن مجموعة الدارات في البيان $K_2\Delta CL_m$ تكون على النحو الآتي:

$$B(K_2\Delta CL_m) = (B(K_2\Delta L_m) \setminus \bigcup_{i=1}^{12} C_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{12} S_i).$$

إذ إن $\bigcup_{i=1}^{12} C_i$ هي الدارات التي تنتمي للقاعدة $B(K_2\Delta L_m)$ وتحتوي على الحافات $x_1 y_{2m}, y_1 x_{2m}, x_2 y_{2m-1}, y_2 x_{2m-1}$ وإن

$$\begin{aligned} C_1 &= \{ x_1 y_{2m-2} x_2 y_{2m-1} x_1 \}, & C_2 &= \{ x_1 y_{2m-1} x_2 y_{2m} x_1 \}, \\ C_3 &= \{ x_2 y_{2m-1} x_3 y_{2m} x_2 \}, & C_4 &= \{ x_2 y_{2m-2} x_3 y_{2m-1} x_2 \}, \\ C_5 &= \{ x_{2m-2} y_1 x_{2m-1} y_2 x_{2m-2} \}, & C_6 &= \{ x_{2m-2} y_2 x_{2m-1} y_3 x_{2m-2} \}, \\ C_7 &= \{ x_{2m-1} y_1 x_{2m} y_2 x_{2m-1} \}, & C_8 &= \{ x_{2m-1} y_2 x_{2m} y_3 x_{2m-1} \}, \\ C_9 &= \{ x_1 y_{2m-3} y_{2m} x_1 \}, & C_{10} &= \{ y_1 x_{2m-3} x_{2m} y_1 \}, \\ C_{11} &= \{ x_{2m} y_1 y_4 x_{2m} \}, & C_{12} &= \{ y_{2m} x_1 x_4 y_{2m} \}. \end{aligned}$$

وإن

$$\begin{aligned} S_1 &= \{ y_1 x_{2m-1} x_2 y_{2m} y_1 \}, & S_2 &= \{ x_1 x_4 y_2 x_{2m} x_1 \}, \\ S_3 &= \{ x_{2m} x_1 y_{2m-2} x_{2m} \}, & S_4 &= \{ y_{2m} x_2 x_{2m-1} y_{2m-3} y_{2m} \}, \\ S_5 &= \{ x_{2m} y_2 y_{2m-1} x_{2m-3} x_{2m} \}, & S_6 &= \{ x_2 y_{2m} x_{2m-4} y_{2m-2} y_{2m-1} y_2 x_2 \}, \\ S_7 &= \{ y_2 x_{2m} y_{2m-4} x_{2m-2} x_{2m-1} x_2 y_2 \}, & S_8 &= \{ x_{2m} x_1 x_2 x_{2m-1} x_{2m} \}, \\ S_9 &= \{ y_{2m} y_1 y_2 y_{2m-1} y_{2m} \}, & S_{10} &= \{ y_1 x_{2m-1} x_{2m-2} y_{2m} y_1 \}, \\ S_{11} &= \{ y_1 y_4 x_{2m} y_{2m} y_1 \}, & S_{12} &= \{ x_1 y_5 x_5 y_1 x_{2m-3} x_{2m} x_1 \}. \end{aligned}$$

من الواضح أن

$$|B(K_2\Delta CL_m)| = (2m-1)^2 = \dim C(K_2\Delta CL_m).$$

الآن نبرهن أن $B(K_2\Delta CL_m)$ مستقلة خطياً، من الواضح أن $\bigcup_{i=1}^{12} C_i \setminus B(K_2\Delta L_m)$ مستقلة خطياً؛ وذلك لأنها قاعدة جزئية من الفضاء $C(K_2\Delta L_m)$ ، وأن $\bigcup_{i=1}^{12} S_i$ مستقلة؛ لأنه لا يمكن كتابة أحدها كتركيب خطي من الدارات الأخرى، أي أن: أي تركيب خطي من هذه الدارات لا يساوي متجهاً صفرياً، وإن $(\bigcup_{i=1}^{12} S_i) \cup (B(K_2\Delta L_m) \setminus \bigcup_{i=1}^{12} C_i)$ تكون مستقلة خطياً؛ وذلك لأن أي تركيب خطي للدارات في $\bigcup_{i=1}^{12} S_i$ تحوي على حافات بالشكل $x_1 x_{2m}$ أو $y_1 y_{2m}$ أو $x_2 x_{2m-1}$ أو $y_2 y_{2m-1}$ والتي لا توجد في أي تركيب خطي للدارات في $B(K_2\Delta L_m) \setminus \bigcup_{i=1}^{12} C_i$ ، وعليه فإن $B(K_2\Delta CL_m)$ مستقلة خطياً ولذلك فهي قاعدة للبيان $K_2\Delta CL_m$.

الآن بقي أن نحسب الثنية للقاعدة $B = B(K_2\Delta CL_m)$ ، لتكن

$$M_1 = B(K_2\Delta L_m) \setminus \bigcup_{i=1}^{12} C_i, \quad M_2 = \bigcup_{i=1}^{12} S_i$$

ولحساب الثنية نقوم بتجزئة حافات البيان $K_2\Delta CL_m$ وبما أن

$$B(K_2\Delta CL_m) = (B(K_2\Delta L_m) \setminus \bigcup_{i=1}^{12} C_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{12} S_i)$$

إذن سوف نقوم بتجزئة حافات الدارات في $\bigcup_{i=1}^{12} S_i$ إلى المجموعات الآتية:

$$\begin{aligned} N_1 &= \{ x_1 x_{2m}, y_1 y_{2m}, x_2 x_{2m-1}, y_2 y_{2m-1} \}, \\ N_2 &= \{ x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; i=1, 2m-1 \}, \\ N_3 &= \{ x_{2m-2} x_{2m-1}, y_{2m-2} y_{2m-1}, x_{2m} y_{2m-2} \}, \\ N_4 &= \{ x_i y_{i+2}, y_j x_{j+2}; i=2m-4, 2m-3, 2m-2 \text{ and } j=2, 2m-4, 2m-3 \}, \\ N_5 &= \{ x_i y_i; i=2, 5 \}, \\ N_6 &= \{ x_{2m-3} x_{2m}, y_{2m-3} y_{2m} \}, \\ N_7 &= \{ x_1 x_4, y_1 y_4, y_{2m} x_{2m-4}, x_{2m} y_{2m-4}, x_{2m} y_4, x_{2m} y_{2m} \}, \\ N_8 &= \{ x_1 y_i; i=5, 2m-2, y_1 x_j; j=5, 2m-3 \} \end{aligned}$$

$$N_9 = \{ x_{2m} y_2 , y_{2m} x_2 , y_1 x_{2m-1} \} ,$$

$$N_{10} = E (K_2 \Delta CL_m) \setminus \bigcup_{i=1}^9 N_i .$$

	$e \in N_1$	$e \in N_2$	$e \in N_3$	$e \in N_4$	$e \in N_5$	$e \in N_6$	$e \in N_7$	$e \in N_8$	$e \in N_9$	$e \in N_{10}$
$f_{M_1}(e)$	= 0	= 3	= 2	= 3	= 2	≤ 2	≤ 3	≤ 3	= 1	≤ 4
$f_{M_2}(e)$	≤ 4	= 1	≤ 2	= 1	≤ 2	≤ 2	= 1	= 1	≤ 3	= 0
$f_B(e)$	≤ 4	= 4	≤ 4	= 4	≤ 4	≤ 4	≤ 4	≤ 4	≤ 4	≤ 4

وعليه فإن النتيجة لكل حافة في البيان $K_2 \Delta CL_m$ لا تزيد عن 4 في القاعدة $B(K_2 \Delta CL_m)$ ، أي أن:

$$b(K_2 \Delta CL_m) \leq 4 \text{ وبهذا يتم البرهان .} \quad \#$$

4. العدد الأساس للفرق التناظري لبيان K_2 مع بيان سلم موبيس ML_m

نحاول في هذا البند دراسة العدد الأساس للفرق التناظري لبيان K_2 مع بيان سلم موبيس ML_m . إن عدد

رؤوس البيان $K_2 \Delta ML_m$ هو $4m$ وعدد حافته هي $4m^2$ ، وإن

$$\dim C(K_2 \Delta ML_m) = (2m-1)^2 .$$

نلاحظ أن البيان $K_2 \Delta ML_m$ يمكن أن نحصل عليه من بيان $K_2 \Delta CL_m$ ، فعندما تكون m فردية في بيان سلم موبيس $K_2 \Delta ML_m$ يكون مشابهاً لبيان $K_2 \Delta CL_m$ في حالة كون m زوجية وعندما تكون m زوجية في بيان سلم موبيس $K_2 \Delta ML_m$ يكون مشابهاً لبيان $K_2 \Delta CL_m$ في حالة كون m فردية وعليه نحصل على المبرهنة الآتية

مبرهنة (1.4): لكل $m \geq 7$ ، فإن $b(K_2 \Delta ML_m) \leq 4$.

المصادر

- [1] Alsardary, S.Y.; Ali, A.A., (2003). The basis number of some special non planar graph, Czechoslovak Math .J., Vol .53, No .2, pp.225-240.
- [2] Alzoubi , M.Y. and Jaradat, M.M., (2005), On the basis number of the composition of different ladders with some graphs, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol. 12, pp. 1861-1868.
- [3] Alzoubi, M.Y. and Jaradat, M.M., (2007), The basis number of the cartesian product of a path with a circular ladder, a Möbius ladder and a net, Kyungpook Math. J., Vol. 47, No.2, pp. 165-174.
- [4] Bony, J.A. and Murty, U.S.R.; (2008), "Graph Theory", Library of congress control Number : 2007940370 .
- [5] Chartrand, G. and Lesniak, L., (1996), "Graphs and Digraphs", 3rd ed., Chapman & Hall, CRC. Press.
- [6] Jaradat, M.M.; Alzoubi, M.Y. and Rawashdeh, E.A., (2004), “The basis number of the lexicographic product of different ladders, SUT Journal of Mathematics, Vol. 40, No.2, pp.91-101.
- [7] Khalifeh, M.H; Yousefi-Azari, H. and Ashrafi, A.R. (2009), The first and second Zagreb indices of some graph operations, Discrete Applied Mathematics, Vol . 157, pp. 804-811.
- [8] Maclane, S., (1937), A combinatorial condition for planar graphs, Fund. Math., Vol. 28, pp. 22-32.
- [9] Schmeichel, E.F., (1981), The basis number of a graph, J. combin. Theory, Ser. B, Vol. 30, No.2, pp. 123-129.