

## Numerical Solution and Stability Analysis of the Sine-Gordon Equation

Saad Abdullah Manna

Norjan Hasan Juma

College of Computer Science and Mathematics

University of Mosul, Iraq

Received on: 01/12/2005

Accepted on: 22/01/2006

### ABSTRACT

The Sine – Gordon equation has been solved numerically by using two finite differences methods: The first is the explicit scheme and the second is the Crank – Nicholson scheme. A comparison between the two schemes has been made and the results were found to be : the first scheme is simpler and has faster convergence while the second scheme is more accurate . Also , the stability analysis of the two methods by the use of Fourier (Von Neumann) method has been done and the results were found to be : The explicit scheme is conditionally stable if  $r^2 \leq (4 - (\Delta t)^2) / 4$  ,  $(\Delta t)^2 \leq 4(\Delta x)^2 / (4 + (\Delta x)^2)$  and the Crank–Nicholson is unconditionally stable .

**Keywords:** Stability Analysis, Finite Differences Methods, Explicit Scheme, Crank – Nicholson method, Fourier (Von Neumann) method, Sine-Gordon Equation.

الحل العددي وتحليل الأستقرارية العددية لمعادلة Sine-Gordon

نورجان حسن جمعة

سعد عبد الله مناع

كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل

تاريخ قبول البحث: 2006/01/22

تاريخ استلام البحث: 2005/12/01

### المخلص

لقد تم حل معادلة Sine–Gordon عددياً باستخدام طريقتين من طرائق الفروقات المنتهية (Finite Differences Methods): الأولى هي الطريقة الصريحة (Explicit Scheme) ، والثانية هي طريقة Crank – Nicholson إذ تم عمل مقارنة بين نتائج كلتا الطريقتين، وقد تبين أن الطريقة الأولى هي الأسهل والأسرع تقارباً ، في حين كانت الطريقة الثانية الأدق . ولقد تمت كذلك دراسة الأستقرارية العددية للطريقتين المستخدمتين في حل معادلة Sine – Gordon باستخدام طريقة Fourier (Von Neumann) ، إذ تبين أن الطريقة الأولى مستقرة على نحو مشروط (Stable) إذا كان

مستقرة على نحو غير مشروط (Unconditionally Stable) .  
 $r^2 \leq (4 - (\Delta t)^2) / 4$  ,  $(\Delta t)^2 \leq 4(\Delta x)^2 / (4 + (\Delta x)^2)$  ، في حين كانت الطريقة الثانية

الكلمات المفتاحية: تحليل الأستقرارية، طرائق الفروقات المنتهية، الطريقة الصريحة، طريقة Crank-Nicholson ،- طريقة (Von Neumann) Fourier ، معادلة Sine-Gordon.

## 1. المقدمة Introduction

إن المعادلات التفاضلية خير وسيلة لوصف معظم المسائل الهندسية والرياضية والعلمية على حد سواء . إذ يتضح ذلك جلياً في وصف عمليات انتقال الحرارة، جريان المائع، الحركة الموجية، الدوائر الإلكترونية فضلاً عن استخداماتها في مسائل الهياكل الإنشائية ، والوصف الرياضي للتفاعلات الكيماوية. إذ أن طريقة الفروقات المنتهية (Finite Difference Method) هي الأكثر استخداماً وشيوعاً وبشكل تفصيلي لحل صيغ مختلفة لهذه المعادلات وذلك باللجوء إلى تحويل كل معادلة تفاضلية إلى معادلة جبرية قابلة للتطبيق على جزء محدد من المجال المتضمن حل المعادلة التفاضلية خلاله [1]. والحل العددي للمعادلة التفاضلية الجزئية هو إيجاد حل المعادلات التفاضلية الجزئية بالتعويض عن المعادلة التفاضلية بمعادلة تقريبية ثم حلها، إذ أن طريقة تقريب الفروقات المنتهية تعوض عن المشتقات الجزئية بالفروقات المنتهية وعليه يقرب حل المعادلة التفاضلية الجزئية بحل معادلة الفروقات المنتهية وبصورة عامة فأن العديد من المسائل غير الخطية ليست لها حلول تحليلية معروفة لذلك يجب أن تحل بالطرائق العددية [2]. أن معادلة Sine-Gordon وضلعها العالمان Frenkel and Kontorova في عام (1939) في فيزياء الحالة الصلبة ( Solid State Physics) ، التي تستخدم لنمذجة التشققات في البلورة، ودرس كل من العالمين Perring and Skyrme في عام (1962) النتائج العددية التي تبين الاستعادة الكاملة للأشكال والسرعة بعد التصادم [16]. وطور كل من Ercolani , Forest and Mclaughlin عام (1990) البنية الهندسية (Geometric Structure) لمعادلة Sine-Gordon القابلة للتكامل تحت شروط حدودية دورية وقاموا بإجراء بعض الاختبارات العددية التي تؤكد النتائج النظرية [8]. ودرس كل من Ablowitz ,Herbst and Schober عام (1996) السلوك العددي للتقطيع القابل للتكامل تماماً ذي التقطيع المضاعف لمعادلة Sine-Gordon، وقد أوضحوا كذلك طبيعة عدم الأستقرارية من خلال البحث التحليلي المدعوم بالتجارب العددية [3]. ودرس Quintero and Sanchez عام

(1998) تحليلياً وعددياً حركة الموجة المنفردة من النوع dc (Soliton dc Motion) المحتثة من قبل دفع خالص من النوع ac في معادلة Sine-Gordon [14]. ودرس كل من Ares , Cuesta Sanchez and Toral , في عام (2003) نموذج Sine-Gordon تحليلياً وكذلك عددياً باستخدام محاكاة Langevin فضلاً عن محاكاة Monte Carlo لنموذج Sine-Gordon ذي البعد الواحد [5]. ودرس كل من Shohet , Barimish , Ebraheem and Scott في عام (2004) النموذج اللاخطي لمعادلة Sine-Gordon الذي يصف الأنماط الهيدروديناميكية المغناطيسية المتموضعة في تجارب شدة الحقل المغناطيسي، ولم يعتمدوا في دراستهم على تحليل Fourier [18]. ودرس كل من Alfimov, Pierantozzi and Vazquez في عام (2005) الحل العددي لمعادلة Sine-Gordon الكسرية باعتبارها تمثل حالة اندراج بين معادلة Sine Gordon ومعادلة Sine-Gordon غير المحلية [4]. وضح Khomeriki and Leon في عام (2005) باستخدام معادلة Sine-Gordon بوصفها معادلة موجة غير خطية لظاهرة السلوك ثنائي الاستقرار (Bistable Behavior) وأعطى شرحاً رصيناً لهذه الظاهرة تحليلياً وعددياً لدراسة النظام اللازمي [11]. وفي هذا البحث ستتم دراسة الحل العددي لمعادلة Sine-Gordon باستخدام طريقتين من طرائق الفروقات المنتهية ودراسة الاستقرار العددي لكلتا الطريقتين.

## 2. النموذج الرياضي The Mathematical Model

إن من معادلات الموجات اللاخطية الأكثر شيوعاً وشهرة هي معادلة

### Klein – Gordon

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - d^2 \Delta u + f(u) = 0 \quad (1)$$

إذ هي واحدة من أهم التوسعات اللاخطية لمعادلة الموجة التي تصف الاهتزاز، حيث أن  $d$  هي سرعة الموجة، كثافة قوة المرونة (Elastic Force Density) توصف بوساطة الدالة  $f(u)$  إذ عندما تكون  $f(u) = \gamma u$  فإن المعادلة (1) سوف تتحول إلى معادلة Klein-Gordon الخطية إذ هي النموذج الأكثر بساطة للمعادلات التي تصف الموجات الخطية المبددة طبيعياً (Normally Dispersive Linear Waves) والاهتزازات لوتر يقع على قاعدة مرنة خطية فضلاً عن عمليات أخرى :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma u = 0$$

إذا كانت  $\gamma = 0$  فإن معادلة Klein–Gordon سوف تتحول إلى معادلة الموجة التقليدية، وعندما تكون  $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \sin u$  فإن المعادلة (1) سوف تتحول إلى معادلة Sine–Gordon [12].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin u \quad (2)$$

أو [8] :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin u \quad (3)$$

مع الشروط الابتدائية والشروط الحدودية

$$u(x, 0) = \pi + \varepsilon_o \cos(\mu x) , \quad u_t(x, 0) = 0$$

$$\mu = 1/\sqrt{2} , \quad L = 2\sqrt{2}\pi , \quad 0 \leq \varepsilon_o \leq 1000 , \quad -L \leq x \leq L$$

$$u(-L, t) = u(L, t) = b \quad ,$$

حيث أن  $b$  ثابت وضع المعادلة (1) من قبل العالمان Klein and Gordon في العشرينات نموذجاً لمعادلة الموجة التي تسمى Klein–Gordon اللاخطية، وان أول من أطلق اسم Sine–Gordon على المعادلة (3) العالم Kruskal، إذ أن  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  تمثل إزاحة الذرات باتجاه المحور  $x$  وان دالة الـ  $\sin$  تمثل دورة الشبكة البلورية، وهذه المعادلة جذبت اهتمام علماء الرياضيات والفيزياء بسبب انتشارها الواسع كنموذج للظواهر الفيزيائية اللاخطية وحركة محفزات الـ DNA [14]. ونتجت خلال فترة الستينيات في مدى واسع من المسائل التي تتضمن البصريات اللاخطية [16]. وان من أهم تطبيقات المعادلة (3) هي دراسة تأثيرات السلسلة الوراثية في انتشار الإثارات اللاخطية في النماذج البسيطة لسلسلة الـ DNA [7]. توجد العديد من المعادلات اللاخطية من النوع Sine–Gordon مثل معادلة Sine–Gordon المشوشة (Perturbed Sine – Equation Gordon) التي تنتج بإضافة حد للمعادلة (3) كالآتي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin u + \varepsilon \sin(\delta_t + \delta_o) \quad (4)$$

إذ  $\varepsilon$  هي السعة، و  $\delta$  هي التردد، و  $\delta_o$  هو الطور لقوة التردد الداخلي التي درسها العلماء Quintero , Sanchez and Martins في عام (2000) [15]. وكذلك بالنسبة إلى معادلة Sine–Gordon

الكسرية (Fractional Sine–Gordon Equation) التي قدمها Alfimov, Pierantozzi and Vazquez في عام (2005) [4] وهي كالتالي:

$$u_{tt} - {}^R D^\alpha u + \sin u = 0 \quad (5)$$

إذ  ${}^R D^\alpha$  هو المشتقة الكسرية لفضاء Riesz وتكون  $1 \leq \alpha \leq 2$ ، إذ عندما  $\alpha = 2$  تتحول المعادلة (5) إلى معادلة Sine–Gordon وعندما  $\alpha = 1$  تتحول إلى Sine–Gordon غير المحلية (Nonlocal Sine–Gordon Equation). وان معادلة:

Modified Korteweg de Vries–(Sin Gordon Equation) MKdV–Sine Gordon تتحول إلى معادلة Sine–Gordon عندما تكون  $(A = 0, B = 1)$ :

$$u_{xt} = \sin u \quad (6)$$

إذ أن  $u_{xt} = u_{xx} - u_{tt}$  باستخدام طريقة تحويل المتغير المعتمد [10] التي تؤدي إلى:

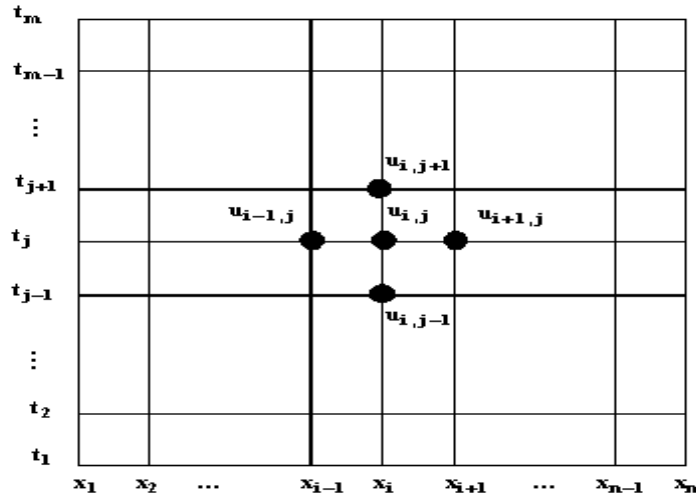
$$u_{xx} - u_{tt} + A \left( \frac{2}{3} u_x^2 u_{xx} + u_{xxx} \right) = B \sin u \quad (7)$$

وان المعادلة (6) درسها Chen في عام (2002) [6].

### 3. اشتقاق صيغة الطريقة الصريحة لمعادلة Sine – Gordon (Explicit Scheme)

نقسم المستطيل  $R = \{(x, t) = -L \leq x \leq L, 0 \leq t \leq c\}$  إلى  $(n-1)(m-1)$  من

المستطيلات أطوال أضلاعها  $\Delta x = h, \Delta t = k$  كما في الشكل (1) [13]:



الشكل (1)

يوضح الشكل المشبك المستخدم في الطريقة الصريحة

نبدأ بالحسابات من الصف الأول  $\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 = \mathbf{0}$  إذ تحسب هذه القيم من الشرط

الابتدائي [3]:

$$u(x_i, t_1) = \pi + \varepsilon_0 \cos(\mu x_i), \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

إذ أن

$$0 \leq \varepsilon_0 \leq 1000, \quad \mu = 1/\sqrt{2}, \quad L = 2\sqrt{2}\pi$$

إن الفروقات المستخدمة لتقريب  $u_{tt}(x, t)$  و  $u_{xx}(x, t)$  هي:

$$u_{tt}(x, t) = \frac{u(x, t+k) - 2u(x, t) + u(x, t-k)}{k^2} + O(k^2) \quad (8)$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + O(h^2) \quad (9)$$

إذ أن نقاط المشبك هي:

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad x_{i-1} = x_i - h, \quad t_{j+1} = t_j + k, \quad t_{j-1} = t_j - k$$

بإهمال  $O(k^2)$  و  $O(h^2)$  نحصل على:

$$u_{tt}(x, t) = \frac{u(x, t+k) - 2u(x, t) + u(x, t-k)}{k^2} \quad (10)$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} \quad (11)$$

ولحساب القيم في الصف الثاني  $t = t_2$  نستعمل متسلسلة Taylor من الرتبة الثانية [13]:

$$u(x, k) = u(x, 0) + u_t(x, 0)k + \frac{u_{tt}(x, 0)k^2}{2!} + O(k^3) \quad (12)$$

وللملاءمة نأخذ  $(x = x_i)$

$$u(x_i, k) = u(x_i, 0) + u_t(x_i, 0)k + \frac{u_{tt}(x_i, 0)k^2}{2} + O(k^3) \quad (13)$$

إذ أن

$$u_{tt}(x_i, 0) = \frac{u(x_{i+1}, 0) - 2u(x_i, 0) + u(x_{i-1}, 0)}{h^2} - \sin(u(x_i, 0)) \quad (14)$$

$$u_t(x_i, 0) = 0 \quad (15)$$

وبتعويض (14) و(15) في المعادلة (13) نحصل على:

$$u(x_i, k) = u(x_i, 0) + \left( \frac{u(x_{i+1}, 0) - 2u(x_i, 0) + u(x_{i-1}, 0)}{h^2} - \sin(u(x_i, 0)) \right) \frac{k^2}{2} + o(k^3)$$

وبإهمال الحدود التي تحتوي على الرتب العليا نحصل على:

$$u(x_i, k) = u(x_i, 0) + \frac{r^2}{2} (u(x_{i+1}, 0) - 2u(x_i, 0) + u(x_{i-1}, 0)) - \frac{k^2}{2} \sin(u(x_i, 0)) \quad (16)$$

إذ  $r = \frac{k}{h}$  وبتعويض  $u_{i,1}$  بدلاً من  $u(x_i, 0)$  وبتبسيط المعادلة (16) نحصل على صيغة تقريبات الفروقات للصف الثاني:

$$u_{i,2} = (1 - r^2) u_{i,1} + \frac{r^2}{2} (u_{i+1,1} + u_{i-1,1}) - \frac{k^2}{2} \sin(u_{i,1}) \quad (17)$$

$$i = 2, 3, \dots, n-1$$

نقوم فيما يأتي بتوضيح حساب التقريبات لـ  $u(x, t)$  عند نقاط المشبك للصفوف الأخرى:

$$\{u(x_i, t_j) : i = 2, 3, \dots, n-1\} \quad j = 3, 4, \dots, m$$

وبتعويض  $u_{i,j}$  بدلاً من  $u(x_i, t_j)$  في المعادلتين (10) و(11) وتعويض المعادلات الناتجة في المعادلة (3) نحصل على:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} - \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = -\sin(u_{i,j}) \quad (18)$$

من المعادلة (18) نحصل على:

$$u_{i,j+1} = -u_{i,j-1} + (2 - 2r^2)u_{i,j} + r^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - k^2 \sin(u_{i,j}) \quad (19)$$

إن المعادلة (19) تمثل تقريب الفروقات المنتهية باستخدام الطريقة الصريحة لمعادلة

Sine-Gordon. وتستخدم المعادلة (19) لحساب الصف  $j+1$  بواسطة القيم المعلومة

$j-1, j$ ، إذ نلاحظ إن هذه الطريقة تحسب بشكل صريح القيم المجهولة  $u_{i,j+1}$  بدلالة القيم

المعلومة  $u_{i,j-1}, u_{i+1,j}, u_{i,j}, u_{i-1,j}$  كما موضح في الشكل (1).

#### 4. تحليل الأستقرارية للطريقة الصريحة باستخدام طريقة (Fourier (Von Neumann)

نفرض ان الحل بطريقة الفروقات المنتهية يمكن أن يفصل إلى الصيغة الآتية :

$$u_{x,t} = e^{\gamma t} e^{i\beta x}, \quad x = nh, t = mk, \quad h = \Delta x, k = \Delta t, \quad \gamma > 0, \beta > 0, i = \sqrt{-1}$$

$$u_{x,t} = e^{\gamma mk} e^{i\beta nh} = (e^{\gamma \Delta t})^m e^{i\beta n \Delta x} = \xi^m e^{i\beta n \Delta x}$$

إن المبدأ العام لهذه الطريقة هو استبدال الحل بطريقة الفروقات المنتهية عند الزمن

(t) بالمقدار  $\xi^m e^{i\beta n \Delta x}$  [17]، ولتطبيق طريقة (Von Neumann) على المعادلة (3) نلجأ

إلى (Linearized Stability Analysis) [9]، إذ نحصل على:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \quad (20)$$

وباستعمال الطريقة الصريحة نحصل على :

$$u_{n,m+1} = -u_{n,m-1} + (2 - 2r^2)u_{n,m} + r^2(u_{n+1,m} + u_{n-1,m}) - (\Delta t)^2 u_{n,m} \quad (21)$$

وبتعويض  $u_{n,m} = \xi^m e^{i\beta n \Delta x}$  في المعادلة (21) نحصل على:

$$\xi^{m+1} e^{i\beta n \Delta x} = -\xi^{m-1} e^{i\beta n \Delta x} + (2 - 2r^2) \xi^m e^{i\beta n \Delta x} + r^2 (\xi^m e^{i\beta(n+1)\Delta x} + \xi^m e^{i\beta(n-1)\Delta x}) - (\Delta t)^2 \xi^m e^{i\beta n \Delta x} \Rightarrow$$

$$\xi^m \xi e^{i\beta n \Delta x} = -\xi^m \xi^{-1} e^{i\beta n \Delta x} + (2 - 2r^2 - (\Delta t)^2) \xi^m e^{i\beta n \Delta x} + r^2 (\xi^m e^{i\beta n \Delta x} e^{i\beta \Delta x} + \xi^m e^{i\beta n \Delta x} e^{-i\beta \Delta x})$$

بالقسمة على  $\xi^m e^{i\beta n \Delta x}$  نحصل على



$$\xi = -\xi^{-1} + (2 - 2r^2 - (\Delta t)^2) + r^2(e^{i\beta\Delta x} + e^{-i\beta\Delta x}) \Rightarrow$$

$$\frac{\xi^2 + 1}{\xi} = (2 - 2r^2 - (\Delta t)^2) + 2r^2 \cos(\beta\Delta x) \Rightarrow$$

$$\frac{\xi^2 + 1}{\xi} = (2 - 2r^2 - (\Delta t)^2) + 2r^2(1 - 2\sin^2(\beta\Delta x/2)) \Rightarrow$$

$$\frac{\xi^2 + 1}{\xi} = 2 \left( 1 - \frac{(\Delta t)^2}{2} - 2r^2 \sin^2(\beta\Delta x/2) \right) \Rightarrow$$

$$\frac{\xi^2 + 1}{\xi} = 2\alpha$$

إذ أن

$$\alpha = 1 - \frac{(\Delta t)^2}{2} - 2r^2 \sin^2(\beta\Delta x/2)$$

$$\xi^2 - 2\alpha\xi + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\xi = \alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - 1}$$

إذ أن  $\xi$  هو عامل التضخم ولكي تكون  $|\xi| \leq 1$  من الضروري أن تكون  $|\alpha| \leq 1$ .

$$\left| 1 - \frac{(\Delta t)^2}{2} - 2r^2 \sin^2(\beta\Delta x/2) \right| \leq 1 \quad (22)$$

من المتباينة (22) نحصل على:

$$-1 \leq 1 - \frac{(\Delta t)^2}{2} - 2r^2 \sin^2(\beta\Delta x/2) \leq 1$$

بأخذ الطرف الأيمن من المتباينة في أعلاه نحصل على

$$1 - \frac{(\Delta t)^2}{2} - 2r^2 \sin^2(\beta\Delta x/2) \leq 1 \quad (23)$$

من المتباينة (23) نحصل على:

$$r^2 \geq \frac{-(\Delta t)^2}{4 \sin^2(\beta\Delta x/2)}$$

بما أن  $r^2 = (\Delta t)^2 / (\Delta x)^2$  أي أن  $r^2$  لا يمكن أن تكون كمية سالبة، أي أن المتباينة (23) تؤدي إلى أن  $r^2 > 0$  وهذه صحيحة دوماً. ولكي تتحقق المتباينة (22) نحتاج إلى:

$$-1 \leq 1 - \frac{(\Delta t)^2}{2} - 2r^2 \sin^2(\beta \Delta x / 2) \Rightarrow$$

$$2 \geq \frac{(\Delta t)^2}{2} + 2r^2 \sin^2(\beta \Delta x / 2) \Rightarrow$$

$$1 - \frac{(\Delta t)^2}{4} \geq r^2 \sin^2(\beta \Delta x / 2)$$

وبما أن  $\sin^2(\beta \Delta x / 2)$  هو واحد لقيمة ما لا  $\beta$  فان المقدار في أعلاه يختزل إلى :

$$r^2 \leq \frac{4 - (\Delta t)^2}{4} \quad (24)$$

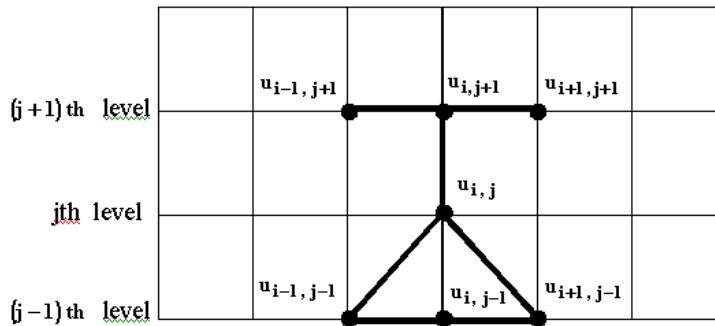
وبما أن  $r^2 = (\Delta t)^2 / (\Delta x)^2$  من المتباينة (24) نحصل على:

$$(\Delta t)^2 \leq \frac{4(\Delta x)^2}{4 + (\Delta x)^2} \quad (25)$$

إن المتباينتين (24) و (25) تمثلان القيود المفروضة على الطريقة الصريحة لكي تكون مستقرة فيما له علاقة بمعادلة Sine – Gordon .

### 5. اشتقاق صيغة طريقة Crank–Nicholson لمعادلة Sine–Gordon

في هذه الطريقة يتم إبدال المشتقة الجزئية الثانية  $u_{xx}$  بالمعدل الحسابي لتقريبات الفروقات المركزية عند الزمن  $j+1$  و  $j-1$  [17] ، كما في الشكل (2):



الشكل (2)

يوضح الشكل مخطط الحل باستخدام طريقة Crank–Nicholson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{h^2} \right] \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} \quad (27)$$

بتعويض المعادلتين (26) و(27) في المعادلة (3) نحصل على:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} - \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{2h^2} - \frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{2h^2} = -\sin(u_{i,j}) \quad (28)$$

من المعادلة (28) يمكن الحصول على:

$$-r^2(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) + (2 + 2r^2)u_{i,j+1} = 4u_{i,j} - 2k^2 \sin(u_{i,j}) + r^2(u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) - (2 + 2r^2)u_{i,j-1} \quad \{29\}$$

إذ أن المعادلة (29) هي تقريب الفروقات المنتهية بطريقة Crank–Nicholson لمعادلة Sine– Gordon وفي هذه الطريقة نحتاج إلى حساب القيم الثلاثة المجهولة في الطرف الأيسر من المعادلة (29) وهي  $u_{i+1,j+1}$ ,  $u_{i,j+1}$ ,  $u_{i-1,j+1}$ ، إذ أن جميع الحدود في الطرف الأيمن من المعادلة (29) معلومة. إن المعادلة (29) تؤدي إلى تكوين نظام جبري خطي ثلاثي الأقطار (Tridiagonal Linear Algebraic System):

$$AX = B \quad (30)$$

إذ أن A هي مصفوفة المعاملات ثلاثية الأقطار، وX هو متجه عمودي يحوي قيم المجاهيل في الطرف الأيسر، وB هو متجه عمودي يحوي القيم المعلومة في الطرف الأيمن والشكل

(2) يعطي توضيحاً بسيطاً لطريقة Crank–Nicholson، وإن الشروط الحدودية ) Boundary Conditions ( تستخدم في المعادلتين الأولى والأخيرة فقط

$$u_{1,j-1} = u_{1,j+1} = b \quad , \quad u_{n,j-1} = u_{n,j+1} = b$$

ويفضل التعبير عن النظام الجبري الناتج من تطبيق طريقة Crank–Nicholson على معادلة Sine– Gordon بالشكل الآتي:

$$\begin{bmatrix} 2+2r^2 & -r^2 & & & & & & & & \\ -r^2 & 2+2r^2 & -r^2 & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & -r^2 & 2+2r^2 & -r^2 & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & -r^2 & 2+2r^2 & -r^2 & \\ & & & & & & & & & 2+2r^2 \\ & & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{p,j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-2,j+1} \\ u_{n-1,j+1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2br^2 + 4u_{2,j} - 2k^2 \sin(u_{2,j}) + r^2 u_{3,j-1} - (2 + 2r^2)u_{2,j-1} \\ 4u_{3,j} - 2k^2 \sin(u_{3,j}) + r^2 (u_{4,j-1} + u_{2,j-1}) - (2 + 2r^2)u_{3,j-1} \\ \vdots \\ 4u_{p,j} - 2k^2 \sin(u_{p,j}) + r^2 (u_{p+1,j-1} + u_{p-1,j-1}) - (2 + 2r^2)u_{p,j-1} \\ \vdots \\ 4u_{n-2,j} - 2k^2 \sin(u_{n-2,j}) + r^2 (u_{n-1,j-1} + u_{n-3,j-1}) - (2 + 2r^2)u_{n-2,j-1} \\ 4u_{n-1,j} - 2k^2 \sin(u_{n-1,j}) + r^2 u_{n-2,j-1} - (2 + 2r^2)u_{n-1,j} + 2r^2 b \end{bmatrix}$$

عند استخدام الحاسبة لحل طريقة Crank–Nicholson فإن النظام  $AX = B$  يمكن حله بالطرائق المباشرة (Direct Methods) أو بالطرائق التكرارية (Iterative Methods)، لقد تم استخدام الطريقة المباشرة طريقة حذف Gauss (Gaussian Elimination Method) لحل النظام الجبري المتمثل بالمعادلة (30) في هذه الدراسة.

## 6. تحليل الأستقرارية لطريقة Crank–Nicholson باستخدام طريقة Fourier (von Neumann)

باستخدام طريقة Crank–Nicholson للمعادلة (20) نحصل على:

$$\begin{aligned} \frac{-r^2}{2} (u_{n+1,m+1} + u_{n-1,m+1}) + (1 + r^2) u_{n,m+1} &= (2 - (\Delta t)^2) u_{n,m} \\ + \frac{r^2}{2} (u_{n+1,m-1} + u_{n-1,m-1}) - (1 + r^2) u_{n,m-1} & \end{aligned} \quad (31)$$

وبتعويض  $u_{n,m} = \xi^m e^{i\beta n \Delta x}$  في المعادلة (31) نحصل على:

$$\begin{aligned} \frac{-r^2}{2} (\xi^m \xi e^{i\beta n \Delta x} e^{i\beta \Delta x} + \xi^m \xi e^{i\beta n \Delta x} e^{-i\beta \Delta x}) + (1 + r^2) \xi^m \xi e^{i\beta n \Delta x} &= (2 - (\Delta t)^2) \xi^m e^{i\beta n \Delta x} \\ + \frac{r^2}{2} (\xi^m \xi^{-1} e^{i\beta n \Delta x} e^{i\beta \Delta x} + \xi^m \xi^{-1} e^{i\beta n \Delta x} e^{-i\beta \Delta x}) - (1 + r^2) \xi^m \xi^{-1} e^{i\beta n \Delta x} & \end{aligned}$$

بالقسمة على  $\xi^m e^{i\beta n \Delta x}$  نحصل على

$$\left( \frac{-r^2}{2} (e^{i\beta \Delta x} + e^{-i\beta \Delta x}) + (1+r^2) \right) \xi = (2 - (\Delta t)^2) + \left( \frac{r^2}{2} (e^{i\beta \Delta x} + e^{-i\beta \Delta x}) - (1+r^2) \right) \xi^{-1} \Rightarrow$$

$$\left( \frac{-r^2}{2} (2 \cos(\beta \Delta x) + (1+r^2)) \right) \xi = (2 - (\Delta t)^2) + \left( \frac{r^2}{2} (2 \cos(\beta \Delta x)) - (1+r^2) \right) \xi^{-1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (-r^2(1 - 2 \sin^2(\beta \Delta x / 2)) + (1+r^2)) \xi &= (2 - (\Delta t)^2) \\ + (r^2(1 - 2 \sin^2(\beta \Delta x / 2)) - (1+r^2)) \xi^{-1} &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$(1 + 2r^2 \sin^2(\beta \Delta x / 2)) \xi + (1 + 2r^2 \sin^2(\beta \Delta x / 2)) \xi^{-1} - (2 - (\Delta t)^2) = 0$$

بتبسيط المعادلة في أعلاه نحصل على:

$$\xi^2 + 1 - \frac{(2 - (\Delta t)^2)}{1 + 2r^2 \sin^2(\beta \Delta x / 2)} \xi = 0$$

بإعادة ترتيب حدود المعادلة في أعلاه ينتج:

$$\xi^2 - 2 \left( \frac{1 - \frac{(\Delta t)^2}{2}}{1 + 2r^2 \sin^2(\beta \Delta x / 2)} \right) \xi + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\xi^2 - 2\alpha \xi + 1 = 0$$

إذ أن

$$\alpha = \frac{1 - \frac{(\Delta t)^2}{2}}{1 + 2r^2 \sin^2(\beta \Delta x / 2)}$$

$$\xi = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}$$

فان

$$\left| \frac{1 - (\Delta t)^2 / 2}{1 + 2r^2 \sin^2(\beta \Delta x / 2)} \right| \leq 1$$

بما أن  $|\xi| \leq 1$  فإن طريقة Crank–Nicholson مستقرة على نحو غير مشروط (Unconditionally Stable).

### 7. مناقشة نتائج الجداول

من خلال ملاحظة نتائج الجدول (1) يتضح انه عند زيادة أو نقصان قيم الثابت  $\varepsilon_0$  عند الشرط الابتدائي (Initial Condition) يعمل على زيادة أو نقصان في قيم الثابت  $b$  الموجود عند الشروط الحدودية (Boundary Condition) والذي بدوره يؤدي إلى زيادة أو تقليل في قيم النتائج العددية للطريقتين وكذلك نلاحظ أن الحل متناظر حول  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  هذا يعني أن  $\mathbf{u}(-\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  أي أن من الممكن حل المسألة للجزء الموجب فقط على اعتبار أن الحل للجزء السالب سيكون مطابقاً مما يؤدي إلى تقليل الوقت والجهد وكمية البيانات (Data) المطلوب خزنها .

### 8. الاستنتاجات Conclusion

من خلال المقارنة بين الطريقة الصريحة وطريقة Crank–Nicholson توصلنا إلى أن الطريقة الصريحة أسرع وأسهل استخداماً من طريقة Crank–Nicholson التي تكون أكثر دقة من الطريقة الصريحة . وبما أن الشرط الابتدائي هو دالة زوجية (Even Function) فإن الحل العددي للمعادلة (3) سيكون متناظراً حول النقطة  $(\mathbf{x} = \mathbf{0})$  كما موضح في الجدول (1). أي أن الحل للفترة  $[0, L]$  سيكون هو نفسه للفترة  $[-L, 0]$  أي من الممكن حل المعادلة (3) للفترة  $[0, L]$  فقط على اعتبار إن  $\mathbf{u}(-\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  مما يؤدي إلى تقليل الحسابات إلى النصف وتوفير الكثير من الوقت والجهد ، وتم تحليل الأستقرارية لكلتا الطريقتين المستخدمتين في حل معادلة Sine–Gordon وباستخدام طريقة Fourier (Von Neumann) وقد تبين أن طريقة Crank–Nicholson مستقرة على نحو غير مشروط (Unconditionally Stable) لجميع قيم  $r^2$  في حين كانت الطريقة الصريحة (Explicit Scheme) مستقرة إذا كان  $r^2 \leq (4 - (\Delta t)^2) / 4$  ،  $(\Delta t)^2 \leq 4(\Delta x)^2 / (4 + (\Delta x)^2)$  أي إنها مستقرة على نحو مشروط (Conditionally Stable) .

x	Explicit $\epsilon_0 = 0.05, t = 1.3332$ b = 3.1916	Crank – Nicholson $\epsilon_0 = 0.05, t = 1.3332$ b = 3.1916	Explicit $\epsilon_0 = 400, t = 1.3332$ b = 403.1416	Crank – Nicholson $\epsilon_0 = 400, t = 1.3332$ b = 403.1416
-8.885765876	3.1916	3.1916	403.1416	403.1416
-8.441477582	3.2012	3.2010	302.7831	302.7687
-7.9971892889	3.1988	3.1975	213.4620	220.5622
-7.552900995	3.1848	3.1838	143.6955	150.5467
-7.108612701	3.1645	3.1640	76.0612	78.9083
-6.664324407	3.1416	3.1415	3.1416	3.6281
-6.220036113	3.1187	3.1189	-69.7780	-70.5974
-5.775747819	3.0981	3.0984	-135.4384	-137.1482
-5.331459526	3.0817	3.0821	-187.4522	-189.9613
-4.887171232	3.0712	3.0717	-220.7139	-223.7452
-4.442882938	3.0676	3.0681	-232.1566	-235.2000
-3.998594644	3.0712	3.0717	-220.7139	-223.7465
-3.55430635	3.0817	3.0821	-187.4522	-189.9675
-3.110018056	3.0981	3.0984	-135.4384	-137.1755
-2.665729763	3.1187	3.1189	-69.7780	-70.7157
-2.221441469	3.1416	3.1416	3.1416	3.1416
-1.777153175	3.1645	3.1643	76.0612	76.9989
-1.332864881	3.1851	3.1848	141.7216	143.4587
-0.888576587	3.2015	3.2010	193.7354	196.2507
-0.444288293	3.2120	3.2115	226.9971	230.0298
0	3.2156	3.2151	238.4398	241.4835
0.444288293	3.2120	3.2115	226.9971	230.0298
0.888576587	3.2015	3.2010	193.7354	196.2507
1.332864881	3.1851	3.1848	141.7216	143.4587
1.777153175	3.1645	3.1643	76.0612	76.9989
2.221441469	3.1416	3.1416	3.1416	3.1416
2.665729763	3.1187	3.1189	-69.7780	-70.7157
3.110018056	3.0981	3.0984	-135.4384	-137.1755
3.55430635	3.0817	3.0821	-187.4522	-189.9675
3.998594644	3.0712	3.0717	-220.7139	-223.7465
4.442882938	3.0676	3.0681	-232.1566	-235.2000
4.887171232	3.0712	3.0717	-220.7139	-223.7452
5.331459526	3.0817	3.0821	-187.4522	-189.9613
5.775747819	3.0981	3.0984	-135.4384	-137.1482
6.220036113	3.1187	3.1189	-69.7780	-70.5974
6.664324407	3.1416	3.1415	3.1416	3.6281
7.108612701	3.1645	3.1640	76.0612	78.9083
7.552900995	3.1848	3.1838	143.6955	150.5467
7.997189288	3.1988	3.1975	213.4620	220.5622
8.441477582	3.2012	3.2010	302.7831	302.7687
8.885765876	3.1916	3.1916	403.1416	403.1416

الجدول (1) يوضح الجدول مقارنة بين الطريقة الصريحة (Explicit Scheme) وطريقة Crank – Nicholson عند  $\epsilon_0 = 0.05, \epsilon_0 = 400, b = 3.1916, b = 403.1416, t = 1.3332$  and  $-L \leq x \leq L$  كذلك يوضح الجدول التناظر حول (  $x = 0$  )



المصادر

- (1) الدلفي ، حسن مجيد حسون ومشكور ، محمود عطا الله مشكور (1999) ، التحليل الهندسي والعددي التطبيقي، الجامعة التكنولوجية ، بغداد ، .
- (2) العاني ، عطا الله ثامر العاني (1982)، المعادلات التفاضلية الجزئية للكليات العلمية والهندسية ، جامعة بغداد .
- [3] Ablowitz , M. J. ; B. M. Herbst and C. Schober (1996) On the Numerical solution of the Sine–Gordon Equation : I. Integrable Discretizations and Homoclinic Manifolds , **J. Comput. Phys.**126 , PP. 299 – 314 .
- [4] Alfimov , G. ; T. Pierantozzi , and L. Vazquez (2005) “Numerical Study of a Fractional Sine–Gordon Equation”, <http://www.math.ucm.es/deptos/ma/inv/prepub/new/2005-18.pdf> .
- [5] Ares , S.; J. A. Cuesta, ; A. Sanchez, and R. Toral (2003) “Apparent Phase Transitions in Finite One–Dimensional Sine–Gordon Lattices , Phys. Rev. E 67 , 046108.
- [6] Chen , D. , Zhang , D. and Deng , S. ,(2002) “The Novel Multi–Soliton Solutions of the MKdV–Sine Gordon Equations” , Japan , **J. Phys. Soc.** Vol. 71 , No. 2 , PP. 658 – 659.
- [7] Cuenda , S. and Sanchez , A. ,(2004) “Nonlinear Excitations in DNA : A Periodic Models versus Actual Genome Sequences” ,**Phys. Rev. E**70 , 051903.
- [8] Ercolani, N.; M.G. Forest, and D.W. Mclaughlin (1990) “Geometry of the Modulation of Instability III , Homoclinic Orbits for the Periodic Sine–Gordon Equation ”, **Physica D** 43 , PP. 349-384 .
- [9] Garbey, M. ; H. G. Kaper, and N. Romanyukha (2001) “A Fast Solver for System of Reaction–Diffusion Equations” , **Thirteenth International Conference on Domain Decomposition Methods** , Editors : Debit, N.; M. Garbey, ; R. Hoppe, ; J. Periaux, and Y. Knznetsov , PP. 385 – 392.

- [10] Hirota, R.(1977) “Nonlinear Partial Difference Equation III: Discrete Sine–Gordon Equation” , **J. Phys. Soc. Japan** 43 , 2079.
  - [11] Khomeriki, R. and J. Leon (2005) “Bistability in Sine–Gordon : The Ideal Switch” , **Phys. Rev. E71** , 056620.
  - [12] Landa, P. S. (1996) **Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems** , Kluwer Academic Publisher.
  - [13] Mathews, J. H. and K. D. Fink (2004) **Numerical Methods Using Matlab** , Prentice–Hall , Inc.
  - [14] Quintero, N. R. and A. Sanchez (1998) “dc Motion of ac Driven Sine– Gordon Solitons” , **Phys. Lett. A247** , PP.161 – 166.
  - [15] Quintero , N. R.; A. Sanchez, and F. G. Mentens (2000) “Existence of Internal Modes of Sine–Gordon Kinks” , **Phys. Rev. E**, Vol. 62 , No.1 , PP.60 – 63 .
  - [16] Scott , A. C. (2003) **Nonlinear Science : Emergence and Dynamics of Coherent Structures** , Second Edition , Oxford and New York : Oxford University Press .
  - [17] Shanthakumar, M. (1989) **Computer Based Numerical Analysis**, Khanna Publishers.
  - [18] Shohet, J. L. ; B. R. Barmish, ; H. K. Ebraheem, and A. C. Scott (2004) “The Sine–Gordon Equation in Reversed–Field Pinch Experiments” , **Phys. of Plasmas** , Vol. 11 , No. 8 , PP. 3877 – 3887.
- “”