Studying the Stability of Some Non-Linear Time Series Models with Application

Abdulghafoor Salim

drabdul_salim@uomosul.edu.iq
College of Computer Science and
Mathematics,
University of Mosul,

Nihad Sharif Khalaf

College of Basic Education
University of Tikrit,

Received on: 02/01/2008

Accepted on: 04/03/2008

ABSTRACT

In this paper we study the stability of time series models in general, and for some non-linear time series models as a special case. Lagrange method to find the stability of non-linear models has been given.

The Leishmaniasis time series was studied and modeled by different non-linear models such as, seasonal ARIMA model by using the logarithmic transformation, exponential model of order two and the polynomial model. The stability of all such models by the above method has been obtained. From the comparison we find that the SARIMA is the best among all such models which we used for forecasting one year ago.

Keywords: stability, time series, non-linear time series models, Lagrange method.

دراسة استقرارية بعض نماذج السلاسل الزمنية غير الخطية مع تطبيق

نهاد شريف خلف

كلية التربية للبنات

جامعة تكريت

عبد الغفور جاسم سالم

كلية علوم الحاسبات والرياضيات

جامعة الموصل

تاريخ قبول البحث: 2008/3/4

تاريخ استلام البحث: 2008/1/2

الملخص

تمت في هذا البحث دراسة الاستقرارية بشكل عام لنماذج السلاسل الزمنية واستقرارية بعض نماذج السلاسل الزمنية غير الخطية بشكل خاص، إذ تم عرض طريقة لاكرانج لإيجاد الاستقرارية للنماذج غير الخطية. وتمت دراسة السلسلة الزمنية لمرض حبة بغداد اللشمانيا (Leishmaniasis) وبنيت لهذه السلسلة عدة نماذج رياضية غير خطية منها النموذج الموسمي باستخدام التحويل (اللوغارتم الطبيعي) ونموذج أسّي من الرتبة الثانية وكذلك نموذج متعدد الحدود وتم إيجاد الاستقرارية لجميع النماذج أعلاه باستخدام الطريقة المذكورة أنفاً ومن خلال مقارنة النماذج

أعلاه تبين أن النموذج الموسمي المندمج يكون أفضل النماذج المقترحة لتمثيل السلسلة وتم التنبؤ بالقيم المستقبلية للمرض ولفترة سنة واحدة باستخدام النموذج الموسمي.

الكلمات المفتاحية: الاستقرار، السلاسل الزمنية، نماذج غير الخطية، طريقة لاكرانج.

1- المقدمة : Introduction

تبنى السلاسل الزمنية عادة على الافتراضات الآتية: الاستقرار، الخطية، الطبيعية علماً إن أغلب السلاسل الزمنية قد لا تتبع التوزيع الطبيعي، وهذه الصفات الثلاثة مهمة جداً في التقدير وبناء نماذج السلاسل الزمنية، لذلك إن دراسة السلاسل الزمنية تشتمل على هذه الافتراضات، وكيفية معالجة السلاسل الزمنية غير المستقرة والنماذج الرياضية الملائمة لتلك السلاسل هل هي خطية أم غير خطية وفيما إذا كانت تتبع التوزيع الطبيعي أم لا.

سنتركز دراستنا في هذا البحث على دراسة الاستقرار stationarity لبعض نماذج السلاسل الزمنية غير الخطية.

تناول Priestley, M.B. في عام (1988) دراسة عدم استقرار النماذج غير الخطية للسلاسل الزمنية [18] وفي عام (1990) قام Tong, H. بدراسة النظام الديناميكي مع الاستقرار في السلاسل الزمنية غير الخطية [21] وفي عام (1992) تناول Bongeral, and Picard, N. دراسة استقرار النموذج GARCH وبعض السلاسل الزمنية غير السالبة [7]. وفي العام نفسه بحث Brockwell, P.J. and Tweedie, R.L. وجود الاستقرار في نماذج العتبة للنموذج ARMA [8] وفي العام نفسه قام Liu, J. and Susko E. بدراسة الاستقرار والحولية لنماذج ARMA غير الخطية [12] وفي العام نفسه درس Mannar عدم الاستقرار في نماذج السلاسل الزمنية [11] وفي 1993 درس Meyn, S.P. and Tweedie, R.L. سلاسل ماركوف والاستقرارية التصادفية [13] وفي عام (1996) درس Manuca, R. and Savit, R. سلاسل ماركوف والاستقرارية التصادفية وفي عام (1997) قام كل من Husmeier . D and Taylor, j. بدراسة شروط الاحتمالية وعملية الاستقرار في السلاسل الزمنية التصادفية المستقرة [10]. وفي العام نفسه قام Schreiber بتحليل عدم الاستقرار في السلاسل الزمنية [18] وفي العام نفسه قام العالمان Pettersson, S. and Lerartgon, B. بدراسة الاستقرار ونظام التقارب (stability and robustness of hybrid system) وكذلك قاما بدراسة تحليل واستقرار الدالة الآسية في النماذج غير الخطية [17]. وفي عام (1998) درس Witt, A. , kurths J. and Pikosvsky, A. حالات الاستقرار في السلاسل الزمنية [23]

2- المرحلية و الاستقرارية [1] Stationary and Stability

تصادفنا في كثير من المسائل الفيزيائية والهندسية عمليات يمكن وصفها بأنها في حالة اتزان إحصائي Statistical Equilibrium ومعنى ذلك إننا لو حصلنا على مشاهدات لعملية من هذا النوع وتم تقسيمها إلى مجاميع من الفترات الزمنية فإن المقاطع المختلفة لهذه المشاهدات تبدو متشابهة . وبكلام أكثر دقة إن الصفات الإحصائية ثابتة لا تتغير مع الزمن . إن العمليات العشوائية التي تتصرف على هذا النحو تدعى عمليات مرحلية stationary [1] . وتعني عدم وجود نمو أو اضمحلال بيانات السلسلة الزمنية بمعنى آخر إن البيانات تكون منتشرة حول وسط ثابت ولها تباين ثابت . فإن ذلك يعني $X_1, X_2, X_3, \dots, X_t$ يجب إن يكون لها دالة الكثافة الاحتمالية نفسها أي إن $f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_t) = f(X_{1+k}, X_{2+k}, \dots, X_{t+k})$ حيث k عدد حقيقي . وإن التوزيع الاحتمالي المشترك لا يتغير مع تغير الفترة الزمنية أو عند الإزاحة بأعداد ثابتة .

نتيجة [1]: إن العمليات المرحلية Stationary تنشأ عادة من خلال نظام مستقر stable يصل إلى حالة الثبات steady state بعد فترة زمنية مناسبة. وقد عرف (Wei 1990) النظام المستقر (stable) بأنه ذلك النظام الذي ينتج الإدخال المحدود فيه دائما إخراجا محددا. وعليه يكون النظام مستقراً stability رياضياً إذا كانت جذور متعدد الحدود لمعادلة النظام في صيغة عامل التأخر (lag operator) تقع كلها خارج دائرة الوحدة (unit Circle) أو أن جذور المعادلة المميزة تقع كلها داخل دائرة الوحدة [1] .

2-1 استقرارية النماذج غير الخطية [6][15][21] Stationarity of non Linear Models

إن التقنيات المطورة لدراسة الاستقرارية وهي استقرارية نماذج السلاسل الزمنية الخطية، تعتمد اعتمادا كبيرا على الافتراضية الخطية ولذلك لا يمكن إن نتوسع بسهولة إلى الحالة غير الخطية ولذلك سوف ندرس حالات خاصة من النماذج غير الخطية المذكورة أنفا. هناك دراسات عديدة لإيجاد الاستقرارية للنماذج غير الخطية منها إيجاد الاستقرارية وحسب طريقة ليينوف المباشرة التي تعتمد على الاستمرارية مع الشرط الابتدائي وتعتمد على أكثر من متغير [14] واستقرارية بويسون (لاحظ المصدر نفسه). وكذلك استقرارية لاكرانج التي عادة تقتصر على السلسلة أو عدة سلاسل ، ويجب إن تكون السلسلة محددة أي $|X_i| \leq M$ حيث M ثابت ، وتستخدم في إيجاد استقرارية السلاسل الزمنية مستمرة الزمن أو المتقطعة الزمن . وكذلك حسب طريقة اوزاكي . وهناك دراسات عديدة في هذا المجال (Tong 90) وسوف يتركز اهتمامنا على استقرارية لاكرانج استقرارية اوزاكي ولزيادة في التفاصيل لاحظ [2].

2-2 الاستقرار حسب طريقة لاكرانج

هناك عدة دراسات لإيجاد استقرارية بعض النماذج غير الخطية منها النماذج الأسية (لاحظ [15]) الاستقرارية للنماذج الثنائية (Bilinear Model) (لاحظ [22]) وإيجاد الاستقرارية لنماذج العتبة للانحدار الذاتي (لاحظ [21]).

معظم هذه الدراسات تستخدم التقريب الخطي لهذه النماذج غير الخطية . أي انه يمكن تحويل النماذج غير الخطية إلى صيغة مشابهة لصيغة النماذج الخطية وبافتراضات معينة فعلى سبيل المثال نأخذ النموذج الآتي :

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \pi X_{t-1}^3 + Z_t \quad \dots(1-1)$$

هذا النموذج يمثل نموذج متعدد حدود وهو نموذج غير خطي يكتب هذا النموذج بالشكل الآتي :

$$X_t = (a_1 + \pi X_{t-1}^2) X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + Z_t \quad \dots(1-2)$$

وهو نموذج انحدار ذاتي من الرتبة الثانية وبوضع قيود معينة على معامل X_{t-1} يمكن إيجاد الاستقرارية بصورة مشابهة للنماذج الخطية .

سوف نذكر بعض التعاريف والمبرهنات الأساسية التي تحتاج إليها في إيجاد الاستقرارية بطريقة لاكرانج .

مبرهنة (1-1) [21]

لتكن $\{\xi\}$ تمثل النظام الآتي:

$$\xi = \begin{cases} A\xi_{t-1} & \text{if } X_{t-2} > 0 \\ B\xi_{t-1} & \text{if } X_{t-2} \leq 0 \end{cases} \quad \dots(1-3)$$

حيث

$$B = \begin{bmatrix} \phi' & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} X_t \\ X_{t-1} \end{bmatrix}$$

نفرض $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$. يكون النظام مستقرا لاكرانجيا إذا تحقق احد الشروط الآتية : (لاحظ [21])

- 1- $\phi_1' < 0$, $\phi_1 \geq 0$ and $\phi_1'(\phi_1\phi_1' + \phi_2) \leq 1$
- 2- $\phi_1' < 0$, $\phi_1 < 0$, $\phi_1\phi_1' + \phi_2 < 0$ and $\phi_1'(\phi_1\phi_1' + \phi_2) \leq 1$
- 3- $\phi_1' < 0$, $\phi_1 < 0$, and $\phi_1\phi_1' + \phi_2 = 0$
- 4- $\phi_1' < 0$, $\phi_1 < 0$, $\phi_1\phi_1' + \phi_1$, and $\phi_1\phi_1' + \phi_2 \leq 1$
- 5- $\phi_1' = 0$
- 6- $1 \geq \phi_1' > 0$, $\phi_1 \geq 0$
- 7- $1 \geq \phi_1' > 0$, $\phi_1 < 0$, $(\phi_1^2 + \phi_2)\phi_1' + \phi_1\phi_2 \leq 0$
- 8- $1 \geq \phi_1' > 0$, $\phi_1 < 0$, $(\phi_1^2 + \phi_2)\phi_1' + \phi_1\phi_2 > 0$
and $(\phi_1^2 + \phi_2)\phi_1' + \phi_1\phi_2 \leq 1$

1-1 تعريف (النقطة المنفردة) (A singular point) [15][14]

لتكن

$$X_t = F(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}) \quad \dots(1-4)$$

تعرف النقطة المنفردة في المعادلة (1-4) بأنها تلك النقطة التي يقترب منها مسار المعادلة عندما $t \rightarrow \infty$ وتسمى في نقطة انفرادية مستقرة . وإذا حصل الاقتراب من النقطة في عندما $t \rightarrow -\infty$ فان النقطة في تسمى نقطة انفرادية غير مستقرة .

1-2 تعريف (دورة النهاية) (limit cycle) [15]

لتكن

$$X_t = F(X_{t-1}, \dots, X_{t-p})$$

الصيغة العامة للمعادلة الفرقية (معرفة في زمن متقطع)

تعرف دورة النهاية للمعادلة أعلاه على أنها المسار المعزول والمغلق

$$X_t, X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+q} = X_t$$

حيث q عدد صحيح موجب يمثل الدورة .

والمسار المعزول هو المسار الذي يقترب جدا لدورة النهاية عندما $t \rightarrow \infty$ أو $t \rightarrow -\infty$, فعندما يكون الاقتراب لدورة النهاية عندما $t \rightarrow \infty$ تسمى دورة نهاية مستقرة (stable limit cycle) وإذا كان الاقتراب لدورة النهاية عندما $t \rightarrow -\infty$ فتسمى دورة نهاية غير مستقرة (unstable limit cycle) cycle) ، أما المسار المغلق فيعني إذا كانت القيمة الابتدائية $(X_1, \dots, X_p)$ تنتمي إلى دورة النهاية فان:

$$(X_{1+kq}, \dots, X_{p+kq}) = (X_1, \dots, X_p)$$

لكل عدد صحيح موجب k .

2-3 استقرارية دورة النهاية [15]

سوف نبدأ بتوضيح استقرارية دورة النهاية على نموذج غير خطي أسي من الرتبة الأولى ثم نعمم الفكرة.

ليكن لدينا النموذج الآتي:

$$X_t = (\phi_1 + \pi_1 e^{-X_{t-1}^2}) X_{t-1} + \varepsilon_t \quad \dots (1-5)$$

حيث $\{\varepsilon_t\}$ إزجاجات بيضاء وان ϕ_1 و π_1 ثوابت حقيقية.

تكون لها دورة نهاية معلومة y_t بالقرب من النقطة X_s الواقعة على المسار والقريبة من دورة النهاية حيث أن :

$$y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+q-1}, y_{t+q} = y_t$$

نعرف

$$X_s = y_s + \xi_s$$

حيث $|\xi_t|$ صغيرة ضمن الفترة $s = t, t-1$. والنقطتان X_{t-1}, X_t على المسار بالقرب من دورة النهاية يمكن إيجادها كما يأتي:

$$x_{t-1} = y_{t-1} + \xi_{t-1} \quad \text{and} \quad X_t = y_t + \xi_t$$

نعوض في المعادلة (1-5) وبإجراء بعض العمليات الجبرية البسيطة نحصل على ما يأتي:

$$\xi_t = \left\{ \phi_1 + \pi_1 (1 - 2y_{t-1}^2) e^{-y_{t-1}^2} \right\} \xi_{t-1} + O(\xi_{t-1}) \quad \dots (1-6)$$

ومنها نستطيع ملاحظة انه إذا كان الحل للمعادلة الآتية:

$$\xi_t = \left\{ \phi_1 + \pi_1 (1 - 2y_{t-1}^2) e^{-y_{t-1}^2} \right\} \xi_{t-1} \quad \dots (1-7)$$

يقترب من الصفر عندما $t \rightarrow \infty$ تكون دورة النهاية مستقرة.

وبما أن المعادلة (1-7) هي معادلة فرقية خطية وبمعاملات دورية يصعب حلها تحليليا لذا يمكن

اختبار المعادلة (1-7) فيما إذا كانت تقترب من الصفر أم لا باستخدام العلاقة $|\xi_{t+q} / \xi_t|$

وتقترب ξ_t من الصفر إذا كانت هذه العلاقة اقل من الواحد.

من المعادلة (1-7) يمكن الحصول على ξ_{t+q} بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned}\xi_{t+q} &= \left\{ \phi_1 + \pi_1(1 - 2y_{t+q-1}^2)e^{-y_{t+q-1}^2} \right\} \xi_{t+q-1} \\ &= \left\{ \phi_1 + \pi_1(1 - 2y_{t+q-1}^2)e^{-y_{t+q-1}^2} \right\} \left\{ \phi_1 + \pi_1(1 - 2y_{t+q-2}^2)e^{-y_{t+q-2}^2} \right\} \xi_{t+q-2}\end{aligned}$$

نستمر بهذه الطريقة لنحصل على ما يأتي:

$$\xi_{t+q} = \prod_{i=1}^q \left\{ \phi_1 + \pi_1(1 - 2y_{t+i-1}^2)e^{-y_{t+i-1}^2} \right\} \xi_t$$

وعليه يكون $\left| \xi_{t+q} / \xi_t \right|$ معطى بالشكل الآتي:

$$\left| \frac{\xi_{t+q}}{\xi_t} \right| = \prod_{i=1}^q \left\{ \phi_1 + \pi_1(1 - 2y_{t+i-1}^2)e^{-y_{t+i-1}^2} \right\} \quad \dots(1-8)$$

ولاستخدام المعادلة (1-8) يمكن الاستفادة من مبرهنة الاستقرارية آلتية.

مبرهنة (2-1) : [14] [15]

دورة النهاية بدورة q للنموذج (1-5) تكون مستقرة إذا كان:

$$\left| \xi_{t+q} / \xi_t \right| < 1$$

البرهان: (لاحظ [14])

باستخدام الطريقة أعلاه والمبرهنة (3-1) الآتية يمكن إيجاد استقرارية دورة النهاية للنموذج الآسي من الرتبة p الآتي:

$$X_t = (\phi_1 + \pi_1 e^{-X_{t-1}^2}) X_{t-1} + \varepsilon_t \quad \dots(1-9)$$

مبرهنة (3-1) : [14] [15]

دورة النهاية بدورة q للنموذج الآسي (1-9) تكون مستقرة إذا كانت القيمة المطلقة للقيم

الذاتية للمصفوفة اقل من الواحد بالقيمة المطلقة، بحيث:

$$A = A_q \cdot A_{q-1} \cdot \dots \cdot A_1 \quad \dots(1-10)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(i)} & a_{1,2}^{(i)} & \dots & a_{1,p-1}^{(i)} & a_{1,p}^{(i)} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots(1-11)$$

وأن

$$a_{1,1}^{(i)} = \phi_1 + \pi_1 - 2 \sum_{j=1}^p (\pi_j \bar{y}_{t+i-j}) \bar{y}_{t+j-i} e^{-\bar{y}_{t+i-1}^2}$$

$$a_{i,k}^{(i)} = \phi_k + \pi_k e^{-\bar{y}_{t+i-1}^2}, \quad k = 2, 3, \dots, p$$

ملاحظة [14] : إن استقرارية النقاط المنفردة غير الصفيرية للنموذج (1-9) يمكن اختبارها بسهولة باستخدام طريقة التقريب الخطي المحلي بالقرب من النقطة الثابتة وكما يأتي:

لتكن X_t مغلقة للنقطة المنفردة غير الصفيرية ξ والتي يمكن إيجادها من العلاقة

$$X_t = \xi + \xi_t$$

حيث ξ_t صغيرة جدا.

بالتعويض عن X_{t-1} بـ $\xi + \xi_{t-1}$ في النموذج (1-9) نحصل على ما يأتي:

$$\xi_t = h_1 \xi_{t-1} + h_2 \xi_{t-2} + \dots + h_p \xi_{t-p} \quad \dots (1-12)$$

حيث

$$h_1 = \frac{\Pi_1 + \phi_1 \sum_{j=1}^p \Pi_j - \Pi_1 \sum_{j=1}^p \phi_j}{\sum_{j=1}^p \Pi_j} + 2 \left(1 - \sum_{j=1}^p \phi_j \right) \ln \left(\frac{1 - \sum_{j=1}^p \phi_j}{\sum_{j=1}^p \Pi_j} \right) \quad \dots (1-13)$$

$$h_i = \frac{\Pi_i + \phi_i \sum_{j=1}^p \Pi_j - \Pi_i \sum_{j=1}^p \phi_j}{\sum_{j=1}^p \Pi_j} \quad ; \quad i = 2, 3, \dots, p \quad \dots (1-14)$$

إن الشرط الضروري والكافي لـ ξ_t لتقرب من الصفر هو أن تكون جذور المعادلة المميزة للمعادلة (1-12) تقع داخل دائرة الوحدة.

الجانب التطبيقي PRACTICAL PART

تناولنا في هذا البحث بيانات احد الأمراض الشائعة في الشرق الأوسط عموماً وفي العراق بصورة خاصة ، وإن هذا المرض هو مرض حبة بغداد للشمانيا (Leishmaniasis) الذي يكثر انتشاره في أيام الشتاء ويقل في أيام الصيف .

ولابد من الإشارة إلى إن التطور الحاصل في مجال الطب جعل بالإمكان الوقاية من الكثير من الأمراض ومكافحتها بل القضاء عليها من خلال تطبيق الوسائل العلمية الحديثة للبحوث التي تهدف إلى دراسات مفصلة لمختلف أنواع الأمراض المعدية وغير المعدية بالبحث عن مسبباتها

وطرائقها تكاثرها بين أفراد المجتمع لغرض التعرف على طرائق الوقاية منها والسيطرة عليها ومنع انتشارها [9].

وتمت نمذجة السلسلة بنماذج خطية منها ARMA,AR,MA,SARIMA وباستخدام البرنامج الجاهز وبالاتماد على اقل مربع خطأ MSE حصلنا على النموذج الموسمي المندمج الآتي :

SARIMA (2,0,0) (3,0,0)₁₂ y_t

حيث $y_t = \ln(x_t)$ وان $\{x_t\}$ هي السلسلة الأصلية وان معاملات الانحدار الذاتي للجزء غير الموسمي هي:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= 0.73392 & \Phi_2 &= 0.14482 \\ \text{std.Err } 0.07257 & & 0.06688\end{aligned}$$

وان معاملات الانحدار الذاتي للجزء الموسمي هي:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= 0.31155 & \Phi_2 &= 0.18983 & \Phi_3 &= 0.22217 \\ \text{std.Err } 0.7175 & & 0.07087 & & 0.06960\end{aligned}$$

الشكل (1-1) يمثل رسم البواقي للنموذج الموسمي (3,0,0) (2,0,0) باستخدام اللوغاريتم

الشكل (1-2) يمثل رسم دالة الارتباط الذاتي للنموذج الموسمي (3,0,0) (2,0,0) باستخدام اللوغاريتم

الشكل (1-3) يمثل رسم الاحتمالية الطبيعية لنموذج الموسمي (3,0,0) (2,0,0) باستخدام اللوغاريتم

الشكل (1-1) يمثل رسم البواقي للنموذج الموسمي المضاعف باستخدام اللوغاريتم ، الشكل (1-2) يمثل رسم دالة الارتباط الذاتي لبواقي النموذج الموسمي المضاعف (3,0,0) (2,0,0) باستخدام اللوغاريتم ومن الشكل نلاحظ أن معاملات الارتباط الذاتي تقع ضمن المدى $1.96 \text{ SE } \hat{P}_k$ (Z)) $(+)$ وباحتمالية 95% وأنها غير مترابطة Uncorrelated. ومن الشكل (1-3) نلاحظ أن البواقي تتبع التوزيع الطبيعي مما يشير إلى ملائمة النموذج وهو النموذج الأفضل من بقية النماذج.

بالنظر إلى طبيعة السلسلة الزمنية غير الخطية لمعدل الإصابات الشهرية لمرض حبة بغداد .لابد من دراسة استقرارية بعض النماذج غير الخطية لهذه السلسلة وقد تم استخدام بعض النماذج منها نموذج الانحدار الذاتي الآسي ونموذج متعدد الحدود .

2-4 استقرارية نموذج الانحدار الذاتي الآسي من الرتبة الثانية [15]

والذي يعرف بالصيغة الآتية :

$$X_t = (\phi_1 + \pi_1 e^{-\lambda x_{t-1}^2}) X_{t-1} + (\phi_2 + \pi_2 e^{-\lambda x_{t-1}^2}) X_{t-2} + Z_t$$

$$X_t = (\phi_1 + 0.01 e^{-10 x_{t-1}^2}) X_{t-1} + (\phi_2 + 0.02 e^{-20 x_{t-1}^2}) X_{t-2} + Z_t$$

وباستخدام البرنامج الجاهز statistica تم الحصول على قيم ϕ_1 و ϕ_2 وأصبح النموذج كالاتي:

$$X_t = (0.789 + 0.01 e^{-10 x_{t-1}^2}) X_{t-1} + (0.0218 + 0.02 e^{-20 x_{t-1}^2}) X_{t-2} + Z_t$$

ولدراسة استقرارية النموذج لابد من إيجاد قيم λ_1, λ_2

$$e^{x_{t-1}^2} \longrightarrow 0 \quad \text{فإن} \quad x_{t-1}^2 \longrightarrow 1 \quad \text{أولاً: عندما}$$

فتصبح المعادلة كالاتي:

$$\lambda^2 - 0.729 \lambda - 0.04 = 0$$

$$\lambda_1 = -0.0513$$

$$\lambda_2 = 0.7803$$

ثانياً:

$$e^{x_{t-1}^2} \longrightarrow 0 \quad \text{فإن} \quad x_{t-1}^2 \longrightarrow \infty \quad \text{عندما}$$

$$X_t = (0.789 + 0.01 e^{-10 x_{t-1}^2}) X_{t-1} + (0.0218 + 0.02 e^{-20 x_{t-1}^2}) X_{t-2} + Z_t$$

باستخدام المعادلة المميزة تصبح المعادلة كما يأتي:

$$\lambda^2 - 0.789 \lambda - 0.0218 = 0$$

$$\lambda_1 = -0.0267$$

$$\lambda_2 = 0.8157$$

لتوضيح فيما إذا كانت النقطة المنفردة تحقق شرط الاستقرارية نستخدم الملاحظة المذكورة أنفاً إذ يجب أن تتحقق العلاقة الآتية:

$$\xi_t = h_1 \xi_{t-1} + h_2 \xi_{t-2}$$

والتي معادلتها المميزة هي:

$$\lambda^2 - h_1 \lambda - h_2 = 0$$

لتوضيح فيما إذا كانت النقطة المنفردة تحقق شرط الاستقرارية نستخدم الملاحظة المذكورة أنفاً إذ يجب أن تتحقق العلاقة الآتية:

$$\xi_t = h_1 \xi_{t-1} + h_2 \xi_{t-2}$$

والتي معادلتها المميزة هي:

$$\lambda^2 - h_1 \lambda - h_2 = 0$$

وبالتعويض عن قيم المعاملات π_i, ϕ_i وبما يساويها في المعادلات (1-13) و (1-14) نحصل على ما يأتي:

$$h_1 = 0.3611$$

$$h_2 = 0.019$$

نجد جذور المعادلة الآتية:

$$\lambda^2 - h_1 \lambda - h_2 = 0$$

$$\lambda_1 = -0.0466$$

$$\lambda_2 = 0.4077$$

ومن هذا نستنتج أن الجذور اقل من واحد
أذن يكون النموذج الآسي من المرتبة الثانية مستقراً.

2-5 استقرارية النموذج متعدد الحدود:

POLYNOMIAL MODEL STATIONARTY

يعرف نموذج الانحدار الذاتي المتعدد الحدود بالصيغة الآتية :

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \dots + \phi_p x_{t-p} + Q(x_{t-1}, \dots, x_{t-p}) + z_t$$

حيث أن $Q(x_{t-1}, \dots, x_{t-p})$ متعدد حدود

$x_{t-1}, \dots, x_{t-p}$ تمثل المتغيرات .

باستخدام البرنامج الجاهز statistica حصلنا على النموذج الآتي:

$$X_t = 0.879X_{t-1} - 0.000001X_{t-1}^3 + 0.009588X_{t-2} + Z_t$$

أو

$$X_t = (0.879 - 0.000001X_{t-1}^2)X_{t-1} + 0.009588X_{t-2} + Z_t$$

نفرض أن

$$(0.879 - 0.000001X_{t-1}^2) = (0.879 - 0.000001 - 0.000001e^{-x_{t-1}^2})$$

فيصبح النموذج

$$X_t = (0.879 - 0.000001 - 0.000001e^{-x_{t-1}^2})X_{t-1} + 0.009588X_{t-2} + Z_t$$

وهو نموذج آسي

الحالة الأولى

عندما

$$1 \longrightarrow e^{-x_{t-1}^2} \longrightarrow 0 \quad \text{فإن}$$

$$X_t = (0.8789)X_{t-1} + 0.009588X_{t-2} + Z_t$$

$$\lambda^2 - 0.8789\lambda - 0.09588 = 0$$

$$\lambda_1 = -0.0981$$

$$\lambda_2 = 0.9771$$

الحالة الثانية

$$e^{-x_{t-1}^2} \rightarrow 0 \quad \text{فإن} \quad x_{t-1}^2 \rightarrow \infty$$

$$X_t = (0.87899)X_{t-1} - 0.000001X_{t-2} + Z_t$$

وتكون قيم λ_1, λ_2 مشابهة للحالة الأولى.

عندما $x_{t-1}^2 \rightarrow 0$ لأن قيمة $\pi_1 = 0.000001$ صغيرة جداً، وهي

$$\lambda_1 = 0.878990$$

$$\lambda_2 = 0.87899$$

ومن الحالة الأولى والحالة الثانية نستنتج أن قيم λ_1, λ_2 هي أقل من الواحد وبذلك يكون النموذج متعدد الحدود مستقراً.

والجدول الآتي يمثل النماذج التي حصلنا عليها وصفاتها الإحصائية (معدل مربع الخطأ والانحراف القياسي و NBIC) لكل منها.

الجدول (1-1)

جدول مقارنة بين النماذج المقترحة

MODEL STAT	AR(6)	MA (7)	ARMA(7,7)	SARIMA	EXP(AR(P))	POLE- NOMIAL MODEL
M.S.E	14019	14469	11732	1.0124	28261	28383
NBIC	4.9272	4.9645	4.9815	0.1400	1.3540	3.8600
S.D	116.817	118.395	104.673	0.97923	6.4000	6.7010

ومن الجدول ومن ملاحظة دالة الارتباط الذاتي ورسم الاحتمالية الطبيعية لبواقي النماذج أعلاه (ولزيادة في التفاصيل لاحظ [2]) نلاحظ تفوق النموذج الموسمي المضاعف على بقية النماذج ، وبأقل معدل مربع خطأ وبأقل NBIC لذلك يكون هو النموذج الأفضل الذي يمثل السلسلة 2-6 استقرارية النموذج المقترح : النموذج المقترح معادلته هو :

$$SARIMA (2,0,0) (3,0,0)_{12} Y_t$$

حيث أن :

	Φ_1	Φ_2	Φ_{s1}	Φ_{s2}	Φ_{s3}
	0.73392	+ 0.14482	+ 0.31155	+ 0.18983	+ 0.22217
StaErr	0.07257	0.06688	0.7175	0.07087	0.06960

يكون النموذج مستقرا إذا كانت جذور المعادلة المميزة للجزء غير الموسمي والجزء الموسمي تقع داخل دائرة الوحدة المعادلة المميزة للجزء غير الموسمي هي :

$$\lambda^2 - 0.7337\lambda - 0.144 = 0$$

$$\lambda_1 = -0.1610$$

$$\lambda_2 = 0.8947$$

والمعادلة المميزة للجزء الموسمي هي

$$\lambda^3 - 0.3\lambda^2 - 0.19\lambda - 0.2 = 0$$

$$\lambda_1 = 0.846$$

$$\lambda_2 = -0.267 + i0.4399$$

$$\lambda_3 = -0.267 - i0.4399$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{y}{x} = -58.692$$

$$r_2 = 0.513$$

$$\theta_3 = \tan^{-1} \frac{y}{x} = 58.692$$

$$r_3 = 0.5137$$

حيث نلاحظ أن $r_3 = 0.5137, r_2 = 0.513, r_1 = 0.846$ وهي جميعها اقل من الواحد بالقيمة المطلقة وكذلك الحال بالنسبة إلى جذور المعادلة المميزة للجزء غير الموسمي مما يشير إلى أن النموذج المقترح مستقر .

والجدول الآتي يمثل القيم المنتبأ بها من النماذج المذكورة آنفا:

القيم الحقيقية	نموذج متعدد الحدود	النموذج الآسي	النموذج الموسمي المضاعف
75	519	492	90
80	214	124	86
93	67	28	109
80	22	10	75
21	19	18	30
10	63	73	21
14	11	0	13
15	13	13	14
10	60	71	6
33	152	172	9
98	376	425	10
64	499	516	19

الجدول (1-2)

من الجدول أعلاه نلاحظ إن القيم المنتبأ بها لفترة 12 شهرا من النموذج الموسمي المضاعف هي الأقرب إلى القيم الحقيقية مما يشير إلى كفاءة النموذج المقترح الذي يمثل النموذج الملائم لبيانات مرض حبة بغداد والشكل (1-4) يمثل السلسلة الأصلية والقيم المنتبأ بها من النموذج المقترح (الموسمي المضاعف).

الشكل (1-4) يمثل رسم التكهّن للسلسلة للنموذج (3,0,0) (2,0,0) باستخدام اللوغاريتم

الاستنتاجات

- 1- إن السلسلة الزمنية للإصابة بمرض حبة بغداد في العراق تبين أنها سلسلة غير مستقرة ولا يوجد اتجاه واضح للسلسلة .
- 2- إن النموذج الموسمي المضاعف من الرتبة (3,0,0) (2,0,0) هو النموذج الملائم للسلسلة الزمنية للإصابة بمرض حبة بغداد وقد أعطى تقديرات جيدة (للتبوء بالقيم المستقبلية) وقريبة من قيم الواقع الفعلي من خلال مقارنته من حيث قابليته على التنبؤ واختيار البواقي مع بقية النماذج المقترحة.
- 3- تكون النماذج الخطية مستقرة إذا كان كل من λ_1 ، λ_2 اقل من واحد وفي حالة النماذج غير الخطية تكون الاستقرار صعبة الحصول .

المصادر

- [1] البد راني ،ظافر رمضان مطر (2002) "دراسة في تشخيص نظم السيطرة التصادفية مع إشارة خاصة إلى أسلوب فضاء أ حاله و الاستقرارية"، أطروحة دكتوراه غير منشورة ،كلية علوم الحاسبات والرياضيات،جامعة الموصل.
- [2] الجبوري ،نهاد شريف خلف (2005)"دراسة الاستقرارية في بعض النماذج غير الخطية مع تطبيق" رسالة ماجستير غير منشورة ،كلية التربية،جامعة تكريت.
- [3] الجواد ،لميعه باقر جواد (2003)"الدمج بين الطرائق الاعتيادية والغلاف الطبيعي بالتحويلات الاستقرارية باعتماد القطع والنافذة المثلى" ، اطروحه دكتوراه غير منشورة،كلية الاداره والاقتصاد ، جامعة بغداد.
- [4] الشر جبي ، قاسم عبده علي (2003) "المقدرات الحصينة لنماذج المختلطة(1,1) ARMA دراسة تجريبية تطبيقية"، أطروحة ، دكتوراه غير منشورة ، كلية الادارة والاقتصاد الجامعة المستنصرية .
- [5] العجيلي ،سندس نوري شكر (2002) "بناء نموذج تصادفي لعدد الإصابات بمرض التدرن الرئوي في محافظة صلاح الدين للفترة (1989-2000) "،رسالة ماجستير غير منشورة ،كلية التربية بنات ،جامعة تكريت .
- [6] المهداوي ،هيفاء جعفر (1991) "الانحدار الذاتي غير المستقر ذو الدرجات الدنيا " ،أطروحة دكتوراه غير منشورة ،كلية الاداره والاقتصاد ،الجامعة المستنصرية.
- [7] Bongeral, P. and Picard, N. (1992) "Stationarity of GARCH processes and some non negative time series " J. Econometrics 52,115-127.
- [8] Brockwell, P.J. & Stramer, O. and Tweedie, R.L. (1996) " Existences of stability of continuous time threshold ARMA processes " J. statistical science, Taipei, Vol. 6, pp. 715.
- [9] Homiltion, James D.,(1994) "Time Series Analysis " , Published by princeton University Press, U.S.A.
- [10] Husmeier, D. & Taylor, J. G. (1997) " predicting Conditional Probability densities of stationary stochastic time series " Neural Networks, 10(3) , pp.479-497.

- [11] Liu, J. & susko, E. (1992) "On strict stationarity and ergodicity non linear ARMA Model" J.Appl. probab.29: pp.363-373.
- [12] Manuca, R. & Savit, R. (1996)"Stationarity and non statioarity
- [13] Meyn, S. P. & Tweedie, R.L. (1993) " Markov chains and stochastic stability " springer –varlag , London.
- [14] Ozaki,T.(1982) "Non linear time series stochastic processes and Dynamical system" Handbook of statistics,Vol.5,Itl.
- [15] Ozaki,T.(1985) "Non linear time series models and Dynamical system" E.J. Hannan, P.R. Krishnaiah, M,M.Rao, eds., Handbook of statistics,Vol.5,pp.25-83.
- [16] Ozaki, T. and Oda, H.(1987)"Non-linear time series model identification by Akaikes information criterion ".proc. IFAC workshop on Information and systems, compiegn, France, October 1997.
- [17] Pettersson, S. & Lennartson, B. (1996) " LMI approach for stability and robusness of hybrid systems" , in proc. Amer. Control conf., Albuquerque NM, pp. 1714-1718.
- [18] Priestly , M.B.(1988) " Non linear and stationary time series analysis " London: ACADEMIC. Press.
- [19] Schreiber. T. (1997) " Detecting and analysis non stationirty in a time series using non linear cross predictions " physical Review Letters 78.
- [20] Tong . H. (1983) " Threshol Models in Non linear time series Analysis " Lecture notes in statistic No. 21, Now York.
- [21] Tong, H. (1990) " Non linear Time series; A Dynamical system Approach ".Oxford University Press ,London.
- [22] Tsay ,RS(1986)."Non linearity Tests for Time series "Biometrika,73,461-466.
- [23] Witt, A. & Kurths, J. & Pikosvky, A. (1998), " Testing statinoarity in time series", physical Review E 58:1800-1810.