

## Stability Study of Double and Spherical Pendulum

Thair Y. Thanoon

Noor Husain Abdullah

thairthanoon@uomosul.edu.iq

College of Computer Sciences and Mathematics  
University of Mosul

Received on:16/9/2010

Accepted on:21/12/2010

## ABSTRACT

This paper devoted to study the stability of periodic motion for physical application which is leads to differential equations of second order (Double and Spherical Pendulum) respectively by using the stability of equilibrium position given by Laypunov and Ghetagev's methods which depends on principle of energy conservation, also we will describe periodic motion and explain the phase plane (The trajectory of solutions) and state of the stability for double and spherical pendulum by using (Maple).

**Keywords:** stability, Double Pendulum, Spherical Pendulum

دراسة استقرارية الحركة للبندول المزدوج والكروي

نور حسين عبد الله

ثائر يونس ذنون

كلية علوم الحاسوب والرياضيات، جامعة الموصل

تاريخ قبول البحث: 2010/12/21

تاريخ استلام البحث: 2010/09/16

## المخلص

هذا البحث مكرس لدراسة استقرارية الحركة الدورية لتطبيق فيزيائي يؤول إلى معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية هما البندول المزدوج والبندول الكروي على التوالي باستخدام بعض الطرق لدراسة استقرار وضع الإتزان هما طريقتي لبيانوف وجيتاييف وبالاعتماد على مبدأ حفظ الطاقة، وتم أيضاً وصف الحركة الدورية وتوضيح مستوى الطور (مسارات الحلول) وحالة الإستقرارية للبندول المزدوج والكروي باستخدام نظام الـ (Maple).

**الكلمات المفتاحية:** الاستقرارية، البندول المزدوج، البندول الكروي.

## 1. المقدمة:

في الحياة العملية الكثير من الظواهر الفيزيائية تحكمها المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الثانية والحركة الدورية كما في حركة البندول البسيط (Simple Pendulum Motion). إن البندول البسيط هو حالة خاصة من البندول الكروي ويُعتبر بندول الساعة (الرقاص) من المواضيع التي وجدت لاكتشاف التفاضل وبالتالي المعادلات التفاضلية واخترع رقااص الساعة منسوب إلى غاليليو ومن ثم استأنف العالم (Christian Huygens) أبحاث غاليليو فاخترع الساعة ذات البندول، لكن العالم ابن يونس المصري (المتوفى عام 1009م) كان قد اخترع الرقااص واستعمله في الساعات الدقااقة وفي حساب الفترات الزمنية أثناء الرصد. أن ديناميكية البندول اتسعت لتشمل تكنولوجيا حديثة مثل الليزر (Laser)، وأن بعض المنظومات الكيميائية تبدي سلوكاً شبيهاً بسلوك البندول شأنها في هذا شأن ضربات القلب، والاتساع أخذ في التزايد ليشمل الطب العضوي والنفسي والتنبؤ الاقتصادي. ومسألة البندول الفيزيائية التي تترجم إلى معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية تكون على الشكل [10]:

$$\theta'' + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \quad \& \quad \theta(0) = x_0 \quad ; \quad \theta'(0) = v_0 \quad \dots(1)$$

حيث أن  $\theta$  هي الزاوية التي يصنعها البندول مع الشاقول.

نلاحظ في المعادلة (1) شروط إضافية غير معبر عنها بالمعادلة التفاضلية نفسها ، وهي في الميكانيكا عبارة عن الوضع الابتدائي  $(x_0)$  عند الزمن  $t = 0$ ، والسرعة الابتدائية  $(v_0)$  عند الزمن  $t = 0$  للجسم المتحرك، وإن إضافة الشروط الابتدائية (Initial Conditions) إلى المعادلة التفاضلية تحدد صفات معينة للحل وتسمى بمسألة القيمة الابتدائية وهي عبارة عن نموذج لمسألة فيزيائية يكون فيها الزمن  $t$  هو المتغير المستقل [5].

لا جدال حول الأهمية البالغة لعلم الميكانيكا في عصر الآلة (Instrument) الذي نحيأه، بل وفي كل عصر فالميكانيكا أو علم الحيل (Stratagem) كما أسماه العرب هو أساس التطور في حضارتنا، وهنالك الكثير من الإسهامات في علم الميكانيكا الذي يُعتبر فرعاً من العلوم الطبيعية الذي يدرس حركة الأجسام مع اعتبار السكون حالة خاصة من الحركة، ومن هذه الإسهامات قوانين الميكانيكا الثلاثة الشهيرة والمعروفة بقوانين نيوتن (Newton Laws) وتُعتبر إلى الآن من أهم الانجازات العلمية. هنالك العديد من أنواع الحركات، أحداها ما يعرف بالحركة الدورية (Periodic Motion) فحركة رصاص الساعة (البندول) وتذبذب وتر الكمنجة ودوران الأرض حول نفسها واهتزاز كتلة في نهاية نابض كلها أمثلة على الحركة الدورية [8]. أما الاستقرار فهو مفهوم ذو أهمية متزايدة في الرياضيات الهندسية الحديثة فقد اقترحت مفاهيم الاستقرار بواسطة الفيزياء، وعليه ظهرت الكثير من الدراسات على الحركة الدورية وحركة البندول بأنواعه المختلفة ودراسة استقرارية هذه الحركة ومن هذه الدراسات:

تناولت دراسة لـ (Hall & Chinnery عام 1995) [2] إستقرارية الحركة الدورية لجسم صلب مربوط بطرف نابض في حالته المتضائلة باستخدام طريقة (Laypunov-Schmidt) وبيّنا بأنه مستقر محاذي، كما وضحا أيضاً مستوى الطور له عندما يقترب من وضع الاتزان.

وجدت دراسة (Corinaldesi عام 1998) [3] حركة البندول الكروي (Spherical Pendulum) وبيّن بأن المعادلة التي تصف هذه الحركة تكون بالشكل:

$$\ddot{\theta} = \frac{-g}{\ell} \sin \theta + \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\ddot{\psi} = -2\dot{\theta}\dot{\psi} \cot \theta$$

وضحت دراسة (Winter عام 2002) [9] الحركة الدورية للبندول البسيط باستخدام نظام الـ Matlab، وإيجاد الحل عددياً باستخدام طريقة رانج كوتا ذات الرتبة الرابعة.

بينت دراسة كل من (Sarychev & Caiado عام 2005) [1] عدم استقرارية وضع الاتزان للبندول المزدوج المقلوب (Double Inverted Pendula) باستخدام مبدأ التقريب الخطي (linearization principle). بينما قدمت دراسة (Krantz & Simmons عام 2007) [8] المعادلة التي تصف الحركة الدورية

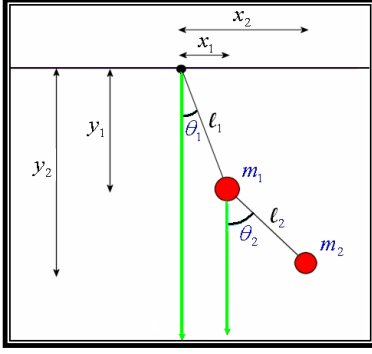
للبنديولان المترابطان بنابض (Two Interrelated Pendulum By Spring)، والتي تكون بالشكل :

$$m \ddot{x}_1 = \frac{-m g}{\ell} x_1 - k (x_1 - x_2)$$

$$m \ddot{x}_2 = \frac{-m g}{\ell} x_2 + k (x_1 - x_2)$$

وهكذا توالت الدراسات في هذا المجال.

## 2- البندول المزدوج Double Pendulum :



عبارة عن نظام يتكون من بندولين أحدهما معلق بالآخر، حيث أن طول البندول الأول  $l_1$  وطول البندول الثاني  $l_2$  مربوطين بكتلتين حيث أن كتلة البندول الأول  $m_1$  وكتلة البندول الثاني  $m_2$  ويصنع البندولين زاويتين بشكل عمودي هما  $\theta_1$  &  $\theta_2$  [7]. وكما موضح في الشكل(1):

الشكل (1): البندول المزدوج

حيث أن:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \theta_1 & ; & & \dot{x}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ x_2 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 & ; & & \dot{x}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ y_1 &= -l_1 \cos \theta_1 & ; & & \dot{y}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ y_2 &= -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 & ; & & \dot{y}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

والطاقة الحركية الناتجة من حركة الكتلة  $m_1$  هي:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad \dots(2)$$

والطاقة الحركية الناتجة من حركة الكتلة  $m_2$  هي:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad \dots(3)$$

ومن المعادلتين (2) و(3) نحصل على الطاقة الحركية للنظام :

$$T = T_1 + T_2$$

ومنها:

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \quad \dots(4)$$

والطاقة الكامنة المخزنة في الكتلة  $m_1$  هي:

$$E_1 = m_1 g y_1 \quad \dots(5)$$

والطاقة الكامنة المخزنة في الكتلة  $m_2$  هي:

$$E_2 = m_2 g y_2 \quad \dots(6)$$

ومن المعادلتين (5) و(6) نحصل على الطاقة الكامنة للنظام:

$$E = E_1 + E_2$$

ومنها:

$$E = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad \dots(7)$$

ولاحصول على نظام حركة البندول المزدوج، نستخدم معادلات لاكرانج (Lagrangian):

$$L = T - E$$

ومنها:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g \ell_1 \cos \theta_1 + m_2 g \ell_2 \cos \theta_2$$

وباستخدام (Euler – Lagrange Equation) لـ  $\theta_1$  فإن:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad \dots(8)$$

إذ أن:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 \ell_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) \ell_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \quad \dots(9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\ell_1 g (m_1 + m_2) \sin \theta_1 - m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad \dots(10)$$

وبالتعويض عن (9) و(10) في (8) نحصل على:

$$(m_1 + m_2) \ell_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + \ell_1 g (m_1 + m_2) \sin \theta_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

وبقسمة الطرفين على  $\ell_1$  وبالتبسيط نحصل على:

$$(m_1 + m_2) \ell_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + m_2 \ell_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + g (m_1 + m_2) \sin \theta_1 = 0 \quad \dots(11)$$

وباستخدام (Euler – Lagrange Equation) لـ  $\theta_2$  فإن:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad \dots(12)$$

إذ أن:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 \ell_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 \ell_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \quad \dots(13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \ell_2 m_2 g \sin \theta_2 \quad \dots(14)$$

وبالتعويض عن (13) و (14) في (12) نحصل على:

$$m_2 \ell_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \ell_2 m_2 g \sin \theta_2 = 0$$

وبقسمة الطرفين على  $\ell_2$  وبالتبسيط نحصل على:

$$m_2 \ell_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 \ell_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 - m_2 \ell_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + m_2 g \sin \theta_2 = 0 \quad \dots(15)$$

وبحل المعادلتين (11) و(15) آنياً، نجد أولاً معادلة الحركة  $\ddot{\theta}_1$  وهذا بضرب المعادلة (15) بـ  $-\cos(\theta_1 - \theta_2)$  عندها تصبح المعادلتين (11) و(15) بالشكل:

$$(m_1 + m_2) \ell_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + m_2 \ell_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + g(m_1 + m_2) \sin \theta_1 = 0$$

$$-m_2 \ell_1 \cos^2(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 - m_2 \ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + m_2 \ell_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - m_2 g \sin \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

وبجمع المعادلتين وبالتبسيط نحصل على معادلة الحركة لـ  $\ddot{\theta}_1$  بالشكل:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\left[ \begin{array}{l} -m_2 \ell_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 - g(m_1 + m_2) \sin \theta_1 + m_2 g \sin \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ -m_2 \ell_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 \end{array} \right]}{\ell_1 (m_1 + m_2 (\sin^2(\theta_1 - \theta_2)))} \quad \dots(16)$$

ولإيجاد معادلة الحركة لـ  $\ddot{\theta}_2$  نضرب المعادلة (11) بـ  $(m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))$  ونضرب المعادلة (15) بـ  $-(m_1 + m_2)$  فتصبح المعادلتين بالشكل:

$$(m_1 + m_2) \ell_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 \ell_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + m_2 \ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + (m_1 + m_2) g \sin \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

$$-(m_1 + m_2) \ell_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 - (m_1 + m_2) \ell_2 \ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) \ell_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - (m_1 + m_2) g \sin \theta_2 = 0$$

وبجمع المعادلتين وبالتبسيط نحصل على معادلة الحركة لـ  $\ddot{\theta}_2$  بالشكل:

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{(m_1 + m_2) \left[ \begin{array}{l} \frac{m_2 \ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2}{m_1 + m_2} + g \sin \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ -g \sin \theta_2 + \ell_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 \end{array} \right]}{\ell_2 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))} \quad \dots(17)$$

تمثل المعادلتين (16) و(17) نظام حركة البندول المزدوج.

### 3- دراسة استقرارية حركة البندول المزدوج باستخدام نظرية لييانوف :

#### • الجانب النظري

في مثل حالة البندول المزدوج ابتدع العالم لييانوف (Laypunov) طريقة سميت بطريقة لييانوف المباشرة أو طريقة لييانوف الثانية، تهدف إلى دراسة استقرارية الحل للمعادلات التفاضلية غير الخطية دون حل المسألة. وتتص نظرية لييانوف الأولى في الاستقرار على أن [4]:

"ليكن لدينا المنظومة التفاضلية:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ولتكن لدينا الدالة  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  والتي تدعى دالة لييانوف و  $x_i \equiv 0$  نقطة اتزان ثابتة تحقق الشروط الآتية بالقرب من نقطة الأصل :

الشروط الأول :

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \quad \& \quad V = 0$$

فقط عند  $x_i \equiv 0$  أي ما معناه ان الدالة  $V$  تملك نهاية صغرى محددة بدقة عند نقطة الأصل.

الشرط الثاني :

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad ; \quad t \geq t_0$$

مستقرة ".  $x_i \equiv 0$  عندها تكون نقطة الاتزان

بالحقيقة إن هذه النظرية ما هي سوى تعميم للمبدأ الفيزيائي والذي ينص على أنه:

"في الأنظمة الفيزيائية الحافظة للطاقة يكون الجسيم في موقع استقرار إذا كانت الطاقة الكامنة في نهايتها الصغرى هناك".

واستناداً إلى هذه النظرية تم الحصول على نتائج البحث.

ففي حالة البندول المزدوج نعمل على تحويل منظومة الحركة من الرتبة الثانية إلى منظومة تفاضلية من

الرتبة الأولى باستخدام الفرضيات التالية :

$$y_1 = \theta_1 ; \quad y_2 = \theta_2 \quad ; \quad y_3 = \dot{\theta}_1 ; \quad y_4 = \dot{\theta}_2$$

وعليه يكون النظام المكافئ بالشكل :

$$\dot{y}_1 = y_3$$

$$\dot{y}_2 = y_4$$

$$\dot{y}_3 = \frac{\left[ \begin{array}{l} -m_2 \ell_2 \sin(y_1 - y_2) y_4^2 - g (m_1 + m_2) \sin y_1 + m_2 g \sin y_2 \cos(y_1 - y_2) \\ -m_2 \ell_1 \cos(y_1 - y_2) \sin(y_1 - y_2) y_3^2 \end{array} \right]}{\ell_1 (m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2))}$$

$$\dot{y}_4 = \frac{(m_1 + m_2) \left[ \begin{array}{l} \frac{m_2 \ell_2 \cos(y_1 - y_2) \sin(y_1 - y_2) y_4^2}{m_1 + m_2} + g \sin y_1 \cos(y_1 - y_2) \\ -g \sin y_2 + \ell_1 \sin(y_1 - y_2) y_3^2 \end{array} \right]}{\ell_2 (m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2))}$$

ومن معادلتى الطاقة الحركية (4) والطاقة الكامنة (7) نجد الطاقة الكلية  $V(y_1, y_2, y_3, y_4)$  وتعتبر بنفس

الوقت دالة لبيانوف محددة الإشارة موجبة:

$$V(y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \ell_1^2 y_3^2 + \frac{1}{2} m_2 \ell_2^2 y_4^2 + m_2 \ell_1 \ell_2 y_3 y_4 \cos(y_1 - y_2) \\ - (m_1 + m_2) g \ell_1 \cos y_1 - m_2 g \ell_2 \cos y_2$$

باستخدام قاعدة السلسلة نجد أن:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial V}{\partial y_2} \dot{y}_2 + \frac{\partial V}{\partial y_3} \dot{y}_3 + \frac{\partial V}{\partial y_4} \dot{y}_4$$

ومنها:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} = & -m_2 \ell_1 \ell_2 y_3^2 y_4 \sin(y_1 - y_2) + (m_1 + m_2) g \ell_1 y_3 \sin y_1 \\
 & + m_2 \ell_1 \ell_2 y_3 y_4^2 \sin(y_1 - y_2) + m_2 g \ell_2 y_4 \sin y_2 \\
 & - \frac{m_2 (m_1 + m_2) \ell_1^2 \ell_2 y_3 y_4^2 \sin(y_1 - y_2)}{\ell_1 (m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2))} - \frac{g (m_1 + m_2)^2 \ell_1^2 y_3 \sin y_1}{\ell_1 (m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2))} + \\
 & + \frac{m_2 (m_1 + m_2) g \ell_1^2 y_3 \sin y_2 \cos(y_1 - y_2)}{\ell_1 (m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2))} - \frac{m_2 (m_1 + m_2) \ell_1^3 y_3^3 \cos(y_1 - y_2) \sin(y_1 - y_2)}{\ell_1 (m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2))} \\
 & - \frac{m_2^2 \ell_1 \ell_2^2 y_4^3 \cos(y_1 - y_2) \sin(y_1 - y_2)}{\ell_1 (m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2))} - \frac{m_2 (m_1 + m_2) \ell_1 \ell_2 g y_4 \sin y_1 \cos(y_1 - y_2)}{\ell_1 (m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2))} \\
 & + \frac{m_2^2 \ell_1 \ell_2 g \sin y_2 \cos^2(y_1 - y_2) y_4}{\ell_1 (m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2))} - \frac{m_2^2 \ell_1^2 \ell_2 y_3^2 y_4 \cos^2(y_1 - y_2) \sin(y_1 - y_2)}{\ell_1 (m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2))} \\
 & + \frac{m_2^2 \ell_2^3 y_4^3 \cos(y_1 - y_2) \sin(y_1 - y_2)}{\ell_2 (m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2))} + \frac{m_2 (m_1 + m_2) \ell_2^2 g y_4 \sin y_1 \cos(y_1 - y_2)}{\ell_2 (m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2))} \\
 & - \frac{m_2 (m_1 + m_2) \ell_2^2 g y_4 \sin y_2}{\ell_2 (m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2))} + \frac{m_2 \ell_1 \ell_2^2 y_3^2 y_4 \sin(y_1 - y_2) (m_1 + m_2)}{\ell_2 (m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2))} \\
 & + \frac{m_2^2 \ell_1 \ell_2^2 y_3 y_4 \cos^2(y_1 - y_2) \sin(y_1 - y_2)}{\ell_2 (m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2))} + \frac{m_2 (m_1 + m_2) \ell_1 \ell_2 g y_3 \sin y_1 \cos^2(y_1 - y_2)}{\ell_2 (m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2))} \\
 & - \frac{m_2 (m_1 + m_2) \ell_1 \ell_2 g y_3 \sin y_2 \cos(y_1 - y_2)}{\ell_2 (m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2))} + \frac{m_2 (m_1 + m_2) \ell_1^2 \ell_2 y_3^3 \cos(y_1 - y_2) \sin(y_1 - y_2)}{\ell_2 (m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2))}
 \end{aligned}$$

وبالتبسيط نحصل على أن:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} = & -m_2 \ell_1 \ell_2 y_3^2 y_4 \sin(y_1 - y_2) + (m_1 + m_2) g \ell_1 y_3 \sin y_1 \\
 & + m_2 \ell_1 \ell_2 y_3 y_4^2 \sin(y_1 - y_2) + m_2 g \ell_2 y_4 \sin y_2 \\
 & - \frac{m_2 (m_1 + m_2) \ell_1 \ell_2 y_3 y_4^2 \sin(y_1 - y_2)}{m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2)} - \frac{g (m_1 + m_2)^2 \ell_1 y_3 \sin y_1}{m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2)} \\
 & + \frac{m_2^2 \ell_2 g y_4 \sin y_2 \cos^2(y_1 - y_2)}{m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2)} - \frac{m_2^2 \ell_1 \ell_2 g y_3^2 y_4 \cos^2(y_1 - y_2) \sin(y_1 - y_2)}{m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2)} \\
 & - \frac{m_2 (m_1 + m_2) \ell_2 g y_4 \sin y_2}{m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2)} + \frac{m_2 (m_1 + m_2) \ell_1 \ell_2 y_3^2 y_4 \sin(y_1 - y_2)}{m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2)} \\
 & + \frac{m_2^2 \ell_1 \ell_2 y_3 y_4^2 \cos^2(y_1 - y_2) \sin(y_1 - y_2)}{m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2)} + \frac{m_2 (m_1 + m_2) \ell_1 g y_3 \sin y_1 \cos^2(y_1 - y_2)}{m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2)}
 \end{aligned}$$

ولكي تكون  $V$  محددة الإشارة سالبة يجب أن تتحقق الشروط التالية:

1.  $(m_1 + m_2) g \ell_1 y_3 \sin y_1 \leq 0$
2.  $m_2 \ell_1 \ell_2 y_3 y_4^2 \sin(y_1 - y_2) \leq 0$

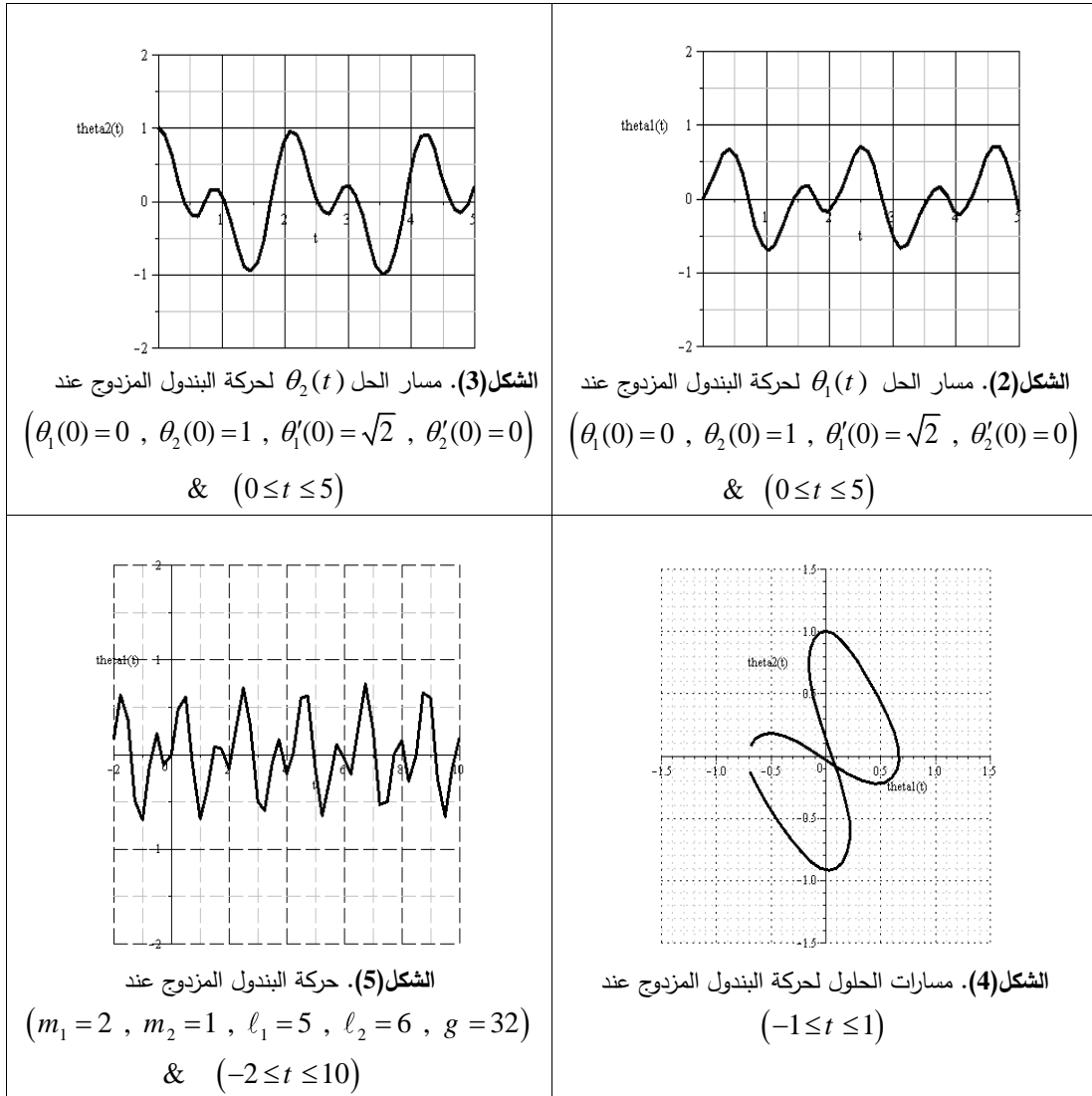
3.  $m_2 g \ell_2 y_4 \sin y_2 \leq 0$
4.  $\frac{m_2^2 \ell_2 g y_4 \sin y_2 \cos^2(y_1 - y_2)}{m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2)} \leq 0$
5.  $\frac{m_2(m_1 + m_2) \ell_1 \ell_2 y_3^2 y_4 \sin(y_1 - y_2)}{m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2)} \leq 0$
6.  $\frac{m_2^2 \ell_1 \ell_2 y_3 y_4^2 \cos^2(y_1 - y_2) \sin(y_1 - y_2)}{m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2)} \leq 0$
7.  $\frac{m_2(m_1 + m_2) \ell_1 g y_3 \sin y_1 \cos^2(y_1 - y_2)}{m_1 + m_2 \sin^2(y_1 - y_2)} \leq 0$

وعليه تُمثل الشروط أعلاه شروط استقرارية حركة البندول المزدوج.

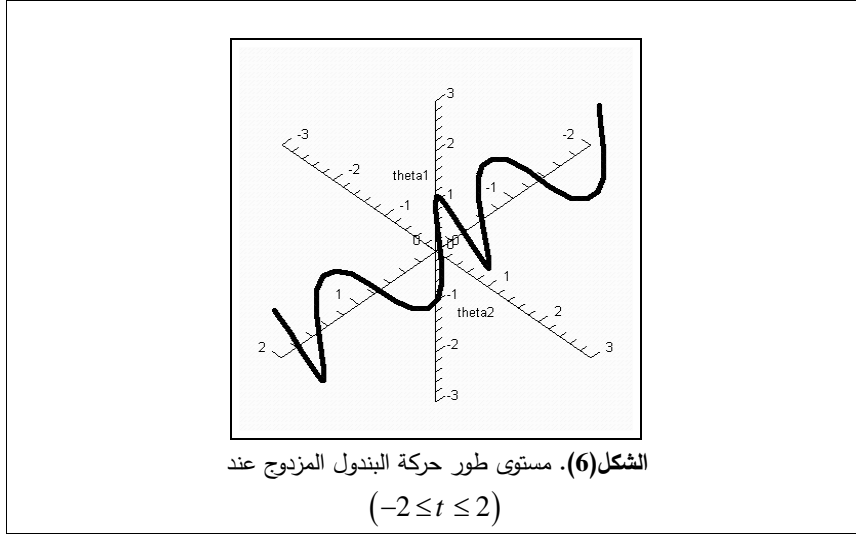
• الجانب العملي

باستخدام نظام الـ (Maple) تم الحصول على الأشكال (2- 6) والتي من خلالها نوضح الحركة الدورية

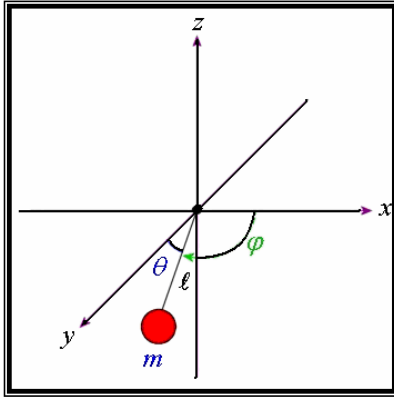
ومستويات الطور وحالة الاستقرارية للبندول المزدوج:







#### 4- البندول الكروي Spherical Pendulum



إن حركة البندول الكروي تتبع مساراً دورياً ، وأول من أكتشف ذلك هو العالم الفيزيائي الهولندي (Christian Huygens) ويُعتبر البندول الكروي أحد الأمثلة على الحركة المقيدة الكلاسيكية حيث يتكون من كرة كتلتها  $m$  مربوطة في نهاية وتر طوله  $l$  غير قابل للمط وتتأرجح بحرية بأي اتجاه كان حول نقطة ثابتة.

الشكل (7). البندول الكروي

إن البندول الكروي يتحرك بثلاث أبعاد،  $(x, y, z)$  وهي الإحداثيات الديكارتية و  $(r, \theta, \phi)$  الإحداثيات الكروية، مما يعطي للبندول الكروي درجتين حريه هما  $\theta$  و  $\phi$  [6]. لإيجاد معادلات الطاقة الحركية والكامنة باستخدام الإحداثيات الكروية وحيث  $(\text{constant } r = l =)$  وكذلك:

$$x = l \sin \theta \cos \phi$$

$$y = l \sin \theta \sin \phi$$

$$z = -l \cos \theta$$

عليه تكون الطاقة الكامنة:

$$E = m g z$$

ومنها:

$$E = -m g l \cos \theta$$

...(18)

وتكون الطاقة الحركية:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

وبالتبسيط نحصل على:

$$T = \frac{1}{2} m \ell^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \quad \dots(19)$$

وللحصول على نظام حركة البندول الكروي، نستخدم معادلات لاكرانج (Lagrangian) :

$$L = T - E$$

ومنها :

$$L = \frac{1}{2} m \ell^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + m g \ell \cos \theta$$

وباستخدام (Euler – Lagrange Equation) فإن :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

ومنها:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{-g}{\ell} \sin \theta + \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ \ddot{\phi} &= -2 \dot{\phi} \dot{\theta} \cot \theta \end{aligned} \right\} \quad \dots(20)$$

وتُمثل المنظومة التفاضلية (20) نظام حركة البندول الكروي.

5- دراسة استقرارية حركة البندول الكروي باستخدام طريقة جيتاييف :

#### • الجانب النظري

في مثل حالة البندول الكروي أقترح الرياضي جيتاييف (Chetayev) بناء دالة ليبانوف بمساعدة

التكاملات بالشكل:

$$V = \lambda_1 [F_1 - F_1(0)] + \dots + \lambda_m [F_m - F_m(0)] + \beta_1 [F_1^2 - F_1^2(0)] + \dots + \beta_m [F_m^2 - F_m^2(0)]$$

حيث أن  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  و  $\beta_1, \dots, \beta_m$  ثوابت اختيارية.

عليه إذا تم اختيار  $\lambda_j, \beta_j$  حيث  $(j = 1, \dots, m)$  بحيث تجعل  $V$  دالة محددة موجبة

فسنكون بذلك قد حققنا جميع شروط نظرية ليبانوف في الاستقرار.

تعتبر طريقة جيتاييف (Chetayev) لبناء دالة ليبانوف بمساعدة التكاملات هي طريقة مؤثرة، ففي حالة

البندول الكروي نلاحظ أنه تؤثر عليه قوى النقل الكامنة وفيه المحور  $\phi$  دوري وطاقته الحركية (19) تعتمد على

السرعة  $\dot{\phi}$  ولا تعتمد على المحور  $\phi$ ، والقوى التي تطابق هذه المحاور تساوي صفر أي ما معناه:

$$\frac{\partial E}{\partial \phi} = 0$$

وعليه يوجد تكاملين للمنظومة التفاضلية (20):

وبالاستعانة بالمعادلتين (18) و(19) يكون التكاملين بالشكل:

$$\left. \begin{aligned} T + E &= \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) - \frac{2g}{\ell} \cos \theta = h \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} &= \dot{\phi} \sin^2 \theta = n \end{aligned} \right\} \dots(21)$$

حيث أن كل من  $h$  و  $n$  ثابتت. ويفرض أن:

$$\theta = \alpha + x_1 \quad ; \quad \dot{\theta} = x_2 \quad ; \quad \dot{\phi} = \eta + x_3$$

وبتعويض الفرضيات في (21) يكون التكاملين بالشكل:

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_1, x_2, x_3) &= \left( x_2^2 + \sin^2(\alpha + x_1)(\eta + x_3)^2 \right) - \frac{2g}{\ell} \cos(\alpha + x_1) = h \\ F_2(x_1, x_2, x_3) &= \sin^2(\alpha + x_1)(\eta + x_3) = \eta \end{aligned} \right\} \dots(22)$$

ونلاحظ أن كلا التكاملين في (22) عبارة عن دوال غير محددة الإشارة ولذلك نستخدم طريقة جيتاييف (Chetayev) في بناء دالة ليانوف بوضع  $\lambda_1 = 1$  و  $\lambda_2 = \lambda$  وعليه تكون الدالة:

$$V = [F_1 - F_1(0)] + \lambda [F_2 - F_2(0)]$$

ومنها:

$$\begin{aligned} V &= \left[ x_2^2 + \sin^2(\alpha + x_1)(\eta + x_3)^2 - \frac{2g}{\ell} \cos(\alpha + x_1) - \eta^2 \sin^2 \alpha + \frac{2g}{\ell} \cos \alpha \right] \\ &+ \left[ \lambda \sin^2(\alpha + x_1)(\eta + x_3) - \lambda \eta \sin^2 \alpha \right] \end{aligned}$$

وبالتبسيط:

$$\begin{aligned} V &= \eta \left[ (\lambda + \eta) \cos 2\alpha + \eta \cos^2 \alpha \right] x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \sin^2 \alpha + \eta (\lambda + 2\eta) x_1 \sin 2\alpha \\ &+ (\lambda + 2\eta) x_3 \sin^2 \alpha + (\lambda + 2\eta) x_1 x_3 \sin 2\alpha \end{aligned}$$

لكي تكون  $V$  دالة تربيعية محددة الإشارة موجبة، علينا التخلص من الحدود التي تحوي المتغيرات  $x_3, x_2, x_1$  من الرتبة الأولى بوضع  $(\lambda = -2\eta)$  في  $V$  لتصبح بالشكل:

$$V = \eta^2 \sin^2 \alpha \cdot x_1^2 + x_2^2 + \sin^2 \alpha \cdot x_3^2 + \dots$$

ومنها:

$$\frac{dV}{dt} = 0$$

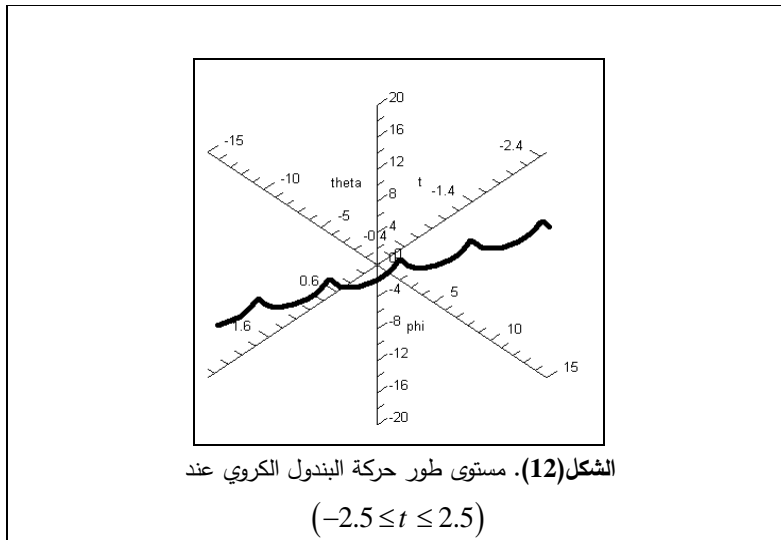
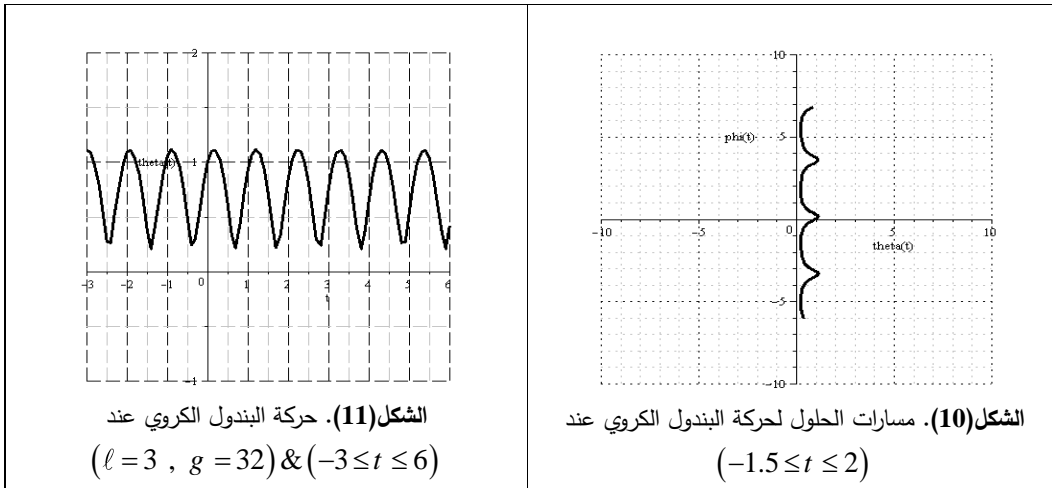
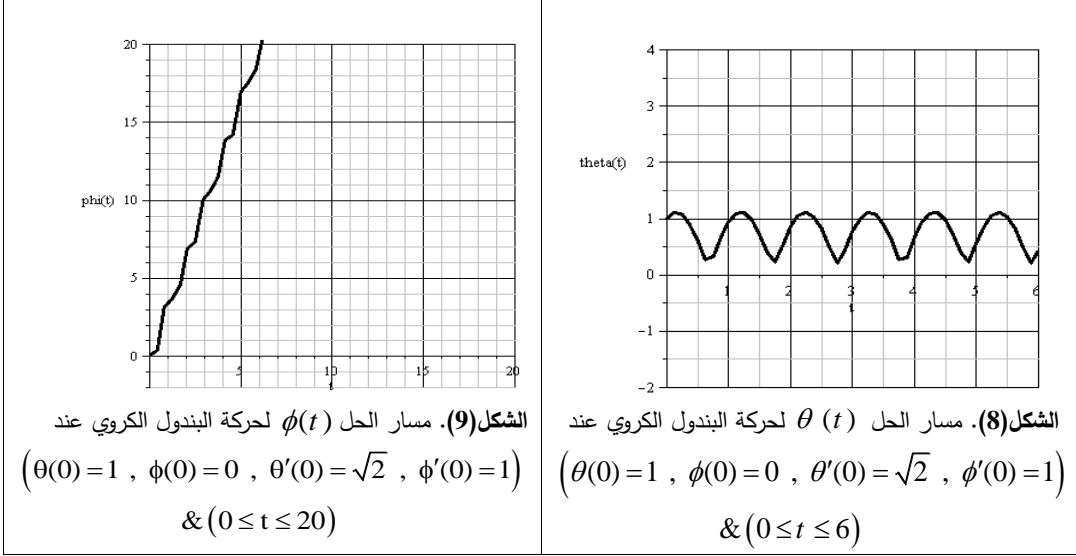
عليه بموجب نظرية جيتاييف ومن التكاملات (22) نحصل على أن حركة البندول الكروي مستقرة

ونستنتج من النتيجة  $\left( \frac{dV}{dt} = 0 \right)$  أن نظام حركة البندول الكروي هو نظام حافظ للطاقة.

#### • الجانب العملي

باستخدام نظام الـ (Maple) تم الحصول على الأشكال (8 - 12) والتي من خلالها نوضح الحركة

الدورية ومستويات الطور وحالة الاستقرارية للبندول الكروي:



## 6- الاستنتاجات

- يمكن تطبيق نظريات ليانوف في الاستقرار على حركة البندول المزدوج (Double Pendulum) وإيجاد الشروط التي تجعل حركته مستقرة.
- يُعتبر نظام البندول الكروي (Spherical Pendulum) إحدى الأنظمة الحافظة للطاقة حسب مبدأ حفظ الطاقة، وبموجب طريقة جيتايف في بناء دالة ليانوف بمساعدة التكاملات تُعتبر حركة البندول الكروي مستقرة.

## 7- التوصيات

- من الممكن تطبيق هذه الدراسة على الكثير من الأجهزة الكهربائية والميكانيكية التي يُعتبر فيها البندول أساس لعملها مثل جهاز السيزموجراف الذي يُستخدم لرصد الاهتزازات الأرضية.

المصادر

- [1] Caiado, M.I. & Sarychev, A.V., 2005, Remarks on Stability of Inverted Pendula, Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 63, No. 4, pp.(333-347).
- [2] Chinnery, A.E. & Hall, C.D., 1995, The Motion of a Rigid Body with an Attached Spring Mass Damper, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 18, No. 6, pp. (1404-1409).
- [3] Corinaldesi, E., 1998, Classical Mechanics for Physics Graduate Students, Co, Pte. Ltd, Boston.
- [4] Elsgolts, L.E., 1961, Differential Equations, India Press, Corpn.
- [5] Eral, D.R. & Phillip, E.B., 1980, Elementary Differential Equations, 6th ed., Co., Inc.
- [6] Fowles, G.R., 1977, Analytical Mechanics, 3rd ed., America, Prentice–Hall.
- [7] Ohlhoff, A. & Richter, P.H., 2006, Forces in the double pendulum, Zamm. angew. Math. Mech., pp. (1-22)
- [8] Simmons, G.F. & Krantz, S.G., 2007, Differential Equations, Mc Graw–Hill, America.
- [9] Winter, I.U., 2002, An Approach to Solving Ordinary Differential Equations, <http://www.ent.ohiou.edu/~urieli/odes/odes.htm/>, pdf.
- [10] Zill, D.G. & Cullen, M.R., 1997, Differential Equations with Boundary Value Problems, 4th ed., U.S.A .