Stability Study of the Orbits of Satellites around the Earth

Thair Y. Thanoon

Marwa Khaled fathy

thairthanoon@uomosul.edu.iq

College of Computer Sciences and Mathematics

University of Mosul, Mosul, Iraq

Received on: 17/09/2012

Accepted on: 30/01/2013

ABSTRACT

In this research, we have studied of the motion of satellite orbits and rotation around the earth and that are subject to the laws of kepler and relationships associated with this motion, such as changing angular and circular time league and the gravitational constant, etc. In the case of circular orbits of Earth satellites. As compounds are calculated position vector x, y, z and vector velocity compounds $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ any time t satellite orbiting the earth geocentric spherical coordinates r, α, δ . It was a study tracks and various forms taken by this motion in both cases using the language (Matlab). Were also study the stability of the motion of satellites using chetayev method assisted integrals were finding the conditions stabilizing motion.

Keywords: The motion orbit, Satellite, Lagrange, Stability, Kepler Laws.

دراسة استقرارية حركة مدارات الاقمار الاصطناعية حول الأرض

مروة خالد فتحي

ثائر يونس ذنون

كلية علوم الحاسوب والرياضيات، جامعة الموصل

تاريخ قبول البحث: 2013/01/30

تاريخ استلام البحث: 2012/09/17

المخلص

في هذا البحث تمت دراسة حركة مدارات الاقمار الاصطناعية ودورانها حول الأرض والتي تخضع لقوانين كبلر والعلاقات المرتبطة بهذه الحركة مثل تغير السرعة الدائرية والزمن الدوري وثابت الجاذبية... الخ في حالة المدارات الدائرية لأقمار الأرض. كما يتم حساب مركبات متجه الموضع x, y, z ومركبات متجه السرعة $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ عند أي زمن t لقمر اصطناعي يدور حول الأرض بالإحداثيات الكروية المركز بأرضية r, α, δ . وتمت دراسة المسارات والأشكال المختلفة التي تتخذها هذه الحركة في الحالتين باستخدام لغة الـ (Matlab). كما تمت دراسة استقرارية حركة الاقمار الاصطناعية باستخدام طريقة جيتاييف بمساعدة التكاملات وتم إيجاد شروط استقرارية الحركة.

الكلمات المفتاحية: حركة المدار، القمر الاصطناعي، لاكرانج، الاستقرارية، قوانين كبلر.

1- المقدمة ومنهجية البحث:

لم يع الإنسان من خلال حضاراته الغابرة رغم تقدمه الرياضي شيئاً مهماً عن مجريات الكون وسلوكه وحوادثه المثيرة إلا شيئاً بسيطاً جداً. فاكتشافه لبعض هذه المظاهر والأسرار الكونية لا يرجع إلا إلى عهد قريب جداً .. إلى ما قبل نيف وثلاثة قرون فقط ذلك بفضل عالمين خلد لهما التاريخ ذكرى مجيدة وعظيمة لما وضعاه من قوانين احكاما فيها روابط هذا الكون وسلوكه هما [1].

1- جوهانس كبلر (1571-1630)

2- إسحاق نيوتن (1643-1727)

تتركب "المنظومة الشمسية" من "نجم" (مثل شمسنا) وأجسام تسمى "الكواكب السيارة" تدور حوله. والنجم عبارة عن جسم يبعث ضوءه الخاص، في حين أن الكواكب لا تبعث ضوءاً ولكن يمكنها أن تعكسه. ويمكن فضلاً على ذلك وجود أجسام أخرى تدور حول الكواكب وتسمى "الأقمار". في منظومتنا الشمسية، على سبيل المثال، يكون "القمر" هو تابع الأرض، وهذه بدورها تكون كوكبا سيارا يدور حول الشمس، فضلاً عن ذلك توجد "أقمار صناعية" من صنع الإنسان، يمكنها أن تدور حول الكواكب أو أقمارها [2].

يسمى مسار الكواكب أو القمر الاصطناعي "مداراً". البعد الأكبر والبعد الأصغر، في مدار كوكب سيار، من الشمس التي يدور حولها يسميان "نقطة الرأس" و"نقطة الحضيض" على الترتيب. كما أن البعدين الأكبر والأصغر في مسار قمر اصطناعي يدور حول كوكب يسميان "نقطة الأوج" و"نقطة الحضيض" للقمر الاصطناعي، والفترة الزمنية التي يستغرقها جسم على مداره في عمل دورة كاملة تسمى "الزمن الدوري"، وفي بعض الأحيان تسمى "الزمن الدوري الفلكي" وذلك لتمييزه عن الأزمان الدورية الأخرى مثل الزمن الدوري لحركة الأرض حول محورها ... الخ [8].

ولمعرفة ديناميكية الأقمار الاصطناعية في مداراتها يجب أن نتطرق إلى القوانين التي تحكم حركة القمر الاصطناعي في مداره حول الأرض. وهذه القوانين تخضع حركة الأقمار الاصطناعية حول الأرض إلى قوانين كبلر ونيوتن.

هنالك الكثير من الدراسات حول حركة الأقمار الاصطناعية ودورانها حول الأرض فمثلاً في [10] تم استنتاج معادلات حركة الأقمار الاصطناعية باستخدام معادلات لاكرانج وتمت دراسة المدارات الناتجة من هذه الحركة باستخدام قوانين كبلر والإزعاجات التي تحدث لهذه الحركة وتأثيرها على أشكال هذه الحركة إذ تمت مناقشة هذه التأثيرات الخطية وغير الخطية.

وفي [9] تم التحري عن سلوك (مسارات) التزامن والتزامن المضاد (synchronization and anti-synchronization) لإثنين من الأقمار الاصطناعية ذات المدارات من شكل القطع المكافئ وذلك باستخدام الشروط الابتدائية واستخدام تقنية السيطرة المعتمدة على استقرارية ليبانوف ومقياس Routh-Hurwitz. إذ تم استخدام معادلة حركة القمر الاصطناعي حول الأرض من الشكل:

$$2C\ddot{\theta} - 3(B-A)\frac{Gm_p}{r^3} \sin 2\psi = 0 \quad \dots(1.1)$$

بأخذ:

$$\frac{3(B-A)}{C} = \omega_0^2, \quad Gm_p = \mu, \quad \psi = f - \theta, \quad \frac{1}{r} = 1 + e \cos f$$

حيث أن f متغير.

أما في [5] فقد تمت دراسة حركة قمر اصطناعي متماثل والذي فيه مركز الكتلة تتحرك بمدار دائري إذ تمت دراسة استقرارية حركة المدار للحركة الدورية المستوية للقمر الاصطناعي حول مركزه باستخدام الأسلوب الطبيعي للتحليلات غير الخطية لهاملتون (Hamiltonian) والتي لها الصيغة الآتية:

$$H = \frac{1}{2\sin^2 \theta} (p\psi + 1)^2 - p\psi + \frac{1}{2} p_\theta^2 + \frac{3}{2} (\alpha - 1) \sin^2 \psi \sin^2 \theta$$

إذ أن A, B ثوابت.

وأن $\alpha = C/A$ ($0 \leq \alpha \leq 2$) و $A = B$ و C هو عزم القصور الذاتي المقابل للمحور o_x, o_y, o_z على التوالي.

2- المدارات الدائرية لأقمار الأرض:

سنتناول في هذا الباب دراسة الحركة الدائرية غير المشوشة (unperturbed circular motion) للقمر الاصطناعي إذ أن كثيرا من الأقمار الاصطناعية (Artificial satellites) للأرض تتحرك في مدارات دائرية أو قريبة جدا من الدائرية.

في معالجة الحركة الدائرية غير المشوشة للأقمار الاصطناعية للأرض نفترض الافتراضات المبسطة الآتية [12]:

1- أن الأرض كرة كاملة الاستدارة.

2- أن قوة جذب الأرض هي القوة الوحيدة المؤثر على القمر الاصطناعي.

3- عجلة الجاذبية (The gravitational acceleration) دائما متجه إلى مركز الأرض وقيمتها g تعطى من قانون نيوتن بالمعادلة:

$$g = \frac{\mu}{r^2} \quad \dots(1)$$

حيث r بعد القمر الاصطناعي عن مركز الأرض و μ هي :

$$\mu = GM \quad \dots(2)$$

وهي تمثل بارمتر الجاذبية الأرضية و G هي ثابت الجذب العام و M كتلة الأرض.

4- مقدار واتجاه السرعة الابتدائية (The initial velocity) لابد وان يضمن حركة دائرية. من الافتراض الثاني والمعادلة (1) نجد ان السرعة الدائرية v_c هي :

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad \dots(3)$$

وأن السرعة الزاوية n (The angular velocity) وهي ما تسمى الحركة المتوسطة (The mean

motion) في علم الميكانيكا المدارية ترتبط بالسرعة الدائرية v_c بالمعادلة [7] :

$$v_c = nr \quad \dots(4)$$

كذلك الزمن الدوري p للقمر الاصطناعي وهو الزمن الذي يستغرقه القمر الاصطناعي لعمل دورة كاملة حول الأرض يعطى بالمعادلة:

$$p = \frac{2\pi r}{v_c} \quad \dots(5)$$

ويلاحظ أن زمن الدورة يمكن الحصول عليه من الحركة المتوسطة

$$p = \frac{2\pi}{n} \quad \dots(6)$$

من المعادلتين (3), (4) نجد ان:

$$n^2 r^3 = \mu \quad \dots(7)$$

وهذه معادلة مشهورة جدا في علم الميكانيكا الفضائية وتعرف كصيغة لقانون كبلر (kepler law). وتعد المعادلة

(7) تقريبا جيدا جدا للعلاقة التامة:

$$n^2 r^3 = G(M + m) \quad \dots(8)$$

والتقريب ناتج من افتراض أن كتلة القمر الاصطناعي m يمكن إهمالها إذا ما قورنت بكتلة الأرض. المعادلة (8) هي الصورة التامة لقانون كبلر للمدارات الدائرية. وطبيعياً أن هذا التقريب لا يؤثر على الإطلاق إذا ما اعتبرنا ديناميكا القمر الاصطناعي حيث أن كتلته أقل كثيراً جداً من كتلة الأرض. وعليه فإن المعادلة (7) صحيحة. لتقييم هذا التقريب نكتب المعادلة (8) بالصيغة الآتية:

$$n^2 r^3 = GM \left\{ 1 + \frac{m}{M} \right\}$$

وعلى سبيل المثال إذا كانت كتلة القمر طناً واحداً فإن النسبة m/M تصبح من الرتبة 10^{-22} وهذا هو الخطأ الناشئ من إهمال الحد m/M [11].

يجدر بنا أن نذكر أن المعادلات السابقة يمكن تعديلها إذا ما أدركنا أن ارتفاع القمر فوق سطح الأرض غالباً ما يعطى وليست المسافة r من مركز الأرض وهذه العلاقة هي:

$$r = R_E + h \quad \dots(9)$$

حيث R_E متوسط نصف قطر الأرض، و h ارتفاع القمر فوق سطح الأرض. أن الطاقة الميكانيكية الكلية (Q The total mechanical energy) لوحدة الكتل لقمر يدور في مدار دائري حول الأرض على بعد r من مركزها هي [6]:

$$Q = Q_k + Q_p = \mu \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{2r} \right) \quad \dots(10)$$

وأن Q_k و Q_p هما على الترتيب طاقة الحركة (Kinetic energy) وطاقة الوضع (Potential energy) لوحدة الكتل حيث [4]:

$$Q_k = \frac{1}{2} v_c^2 = \frac{\mu}{2r} \quad \dots(11)$$

$$Q_p = \int_{R_E}^r \frac{\mu}{r^2} dr = \mu \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{r} \right) \quad \dots(12)$$

ويلاحظ أنه: من المعادلة (10) والمعادلة (4) نجد أنه عندما $r \rightarrow \infty$ فإن الطاقة الكلية للقمر الاصطناعي تقول إلى قيمة ثابتة هي $Q_\infty = \mu / R_E$ وعليه عندما $r \rightarrow \infty$ فإن طاقة القمر الاصطناعي الكلية تصبح طاقة وضع فقط.

يمثل الجدول (1) حساب تغير كل من السرعة الدائرية v_c والزمن الدوري p والطاقة الكلية Q وثابت الجاذبية العام G والسرعة الزاوية n لقمر اصطناعي نفترض أن ارتفاعه h عن سطح الأرض لقمر اصطناعي يدور حولها في مدار دائري.

الجدول (1)

h	G	Q	v_c	P	n
0	8.1076e+012	-1.2712e+009	7.9053	5.0694e+003	0.0012
5000	2.5802e+013	-2.2677e+009	5.9188	1.2079e+004	5.2019e-004
10000	5.3461e+013	-3.2642e+009	4.9333	2.0860e+004	3.0121e-004
15000	9.1085e+013	-4.2606e+009	4.3180	3.1108e+004	2.0198e-004

20000	1.3867e+014	-5.2571e+009	3.8873	4.2636e+004	1.4737e-004
25000	1.9623e+014	-6.2536e+009	3.5641	5.5316e+004	1.1359e-004
30000	2.6375e+014	-7.2501e+009	3.3101	6.9051e+004	9.0993e-005
35000	3.4123e+014	-8.2466e+009	3.1037	8.3766e+004	7.5009e-005

باستخدام لغة Matlab تم الحصول على الاشكال التالية التي تمثل تغيراً ثابتاً في الجاذبية العامة G والطاقة الكلية Q والسرعة الدائرية v_c والزمن الدوري P والسرعة الزاوية n على التوالي مع الارتفاع h لقمر اصطناعي يدور حول الأرض في مدار دائري.

تغير الطاقة الكلية Q مع الارتفاع h

تغير ثابت الجاذبية العام G مع الارتفاع h

تغير الزمن الدوري p مع الارتفاع h

تغير السرعة الدائرية v_c مع الارتفاع h

تغير السرعة الزاوية n مع الارتفاع h

3- الإحداثيات الكروية المُركز بأرضية (Geocentric spherical coordinates)

يتحدد موضع القمر الاصطناعي في الإحداثيات الكروية المُركز بأرضية بثلاثة إحداثيات هم:

- r : بعد القمر عن مركز الأرض
 - α : المطلع المستقيم وهو الزاوية بين الخط $o\gamma$ من مركز الأرض إلى نقطة الاعتدال الربيعي γ ومستوى الزوال المار بالقمر الاصطناعي. وتقاس من γ في اتجاه الشرق
 - δ : الميل (declination) وهو الزاوية بين الخط oD ومستوى الاستواء الأرضي. ويقاس موجباً إذا وقع القمر الاصطناعي فوق دائرة الاستواء الأرضي ويقاس سالبا إذا وقع القمر الاصطناعي تحته.
- يمثل الجدول (2) حساب الإحداثيات الكروية المُركز بأرضية r, δ, α وكذلك معدلات التغير $\dot{\delta}, \dot{\alpha}$ عند أي زمن t لقمر اصطناعي يدور حول الأرض في مدار دائري حيث α المطلع المستقيم , δ الميل, r البعد عن مركز الأرض.

الجدول (2)

h	t	i^0	Ω^0	r	α	δ	$\dot{\alpha}$	$\dot{\delta}$
500	1.5	30	60	6.8781e+003	3.4510	0.0022	9.4477e-008	-6.0515e-007
1000	2	100	35	7.3781e+003	3.5825	9.0405e-004	4.2789e-007	-2.5126e-007
1326	12	70	200	7.7041e+003	5.2203	-0.0012	2.7603e-007	3.3730e-007
2000	4.2	175	300	8.3781e+003	4.6896	9.7626e-004	2.282e-007	-2.7150e-007

باستخدام لغة Matlab تم الحصول على الاشكال التالية التي تمثل حساب الإحداثي الكروي المُركز بأرضية α, δ مع معدلات التغير $\dot{\alpha}, \dot{\delta}$ على التوالي عند أي زمن t لقمر اصطناعي يدور حول الأرض في مدار دائري.

حساب الإحداثي الكروي المُركز بأرضية δ مع معدلات التغير $\dot{\delta}$ عند أي زمن t

حساب الإحداثي الكروي المُركز بأرضية α مع معدلات التغير $\dot{\alpha}$ عند أي زمن t

يمثل الجدول (3) حساب مركبات متجه الموضع (x, y, z) ومركبات متجه السرعة $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ عند أي زمن t لقمر اصطناعي يدور حول الأرض في مدار دائري وذلك من عناصر مداره.

الجدول (3)

h	t	i	Ω	x	y	z	$\dot{x}$	$\dot{y}$	$\dot{z}$
560	1.5	43	62	-1.2688e+003	5.4531e+003	-4.0978e+003	-5.8148	1.9830	-4.4767
1150	2	110	15	7.0122e+003	-2.7369e+003	-109.8634	-2.6392	-6.7742	-0.1062
2151	12	80	195	-8.0833e+003	-1.5648e+003	2.2265e+0003	1.5920	1.1044	1.7846
2222	4.2	170	320	-8.4406e+003	1.4026e+003	-867.1408	-0.8264	-6.3692	-0.6864

باستخدام لغة Matlab تم الحصول على الاشكال التالية التي تمثل حساب مركبات متجهات الموضع x, y, z مع مركبات متجهات السرعة $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ على التوالي عند أي زمن t لقمر اصطناعي يدور حول الأرض في مدار دائري.

حساب مركبات متجه الموضع y مع مركبات متجه السرعة $\dot{y}$ عند أي زمن t

حساب مركبات متجه الموضع x مع مركبات متجه السرعة $\dot{x}$ عند أي زمن t

حساب مركبات متجه الموضع z مع مركبات متجه السرعة $\dot{z}$ عند أي زمن t

يمثل الجدول (4) حساب مركبات متجه الموضع (x, y, z) ومركبات متجه السرعة $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ عند أي زمن t لقمر اصطناعي يدور حول الأرض في مدار دائري وذلك من احداثياته الكروية r, α, δ ومعدلات التغير $\dot{r}, \dot{\alpha}, \dot{\delta}$ حيث r بعد القمر عن مركز الأرض و α, δ المطلع المستقيم والميل على الترتيب.

الجدول (4)

h	α	δ	$\dot{\alpha}$	$\dot{\delta}$	x	y	z	$\dot{x}$	$\dot{y}$	$\dot{z}$
24196.1	306.129	7.3054	0.323341	0.248925	2.7961e+003	1.5697e+004	2.6088e+004	6.2142e+003	5.4892e+003	3.9688e+003

95523. 3	350.784	1.87102	0.059354 5	0.030 5397	1.4353e+0 04	2.6498e+0 04	9.7343e +004	2.9887e+00 3	1.7621e+0 03	-920.3355
3839.4 8	212.348	69.5159	5.95582	0.268 41	2.6946e+0 03	9.0135e+0 03	3.9870e +003	5.3376e+00 4	1.7074e+0 03	2.5251e+0 03
72563. 2	297.906	4.66184	0.031017	0.092 8438	3.4102e+0 03	2.0688e+0 33	7.8841e +004	6.1941e+00 3	3.9024e+0 03	-370.3265
65101. 7	8.04178	1.18924	0.083309 3	0.077 2065	4.9692e+00 3	2.6149e+0 04	6.6339e +004	1.2222e+00 3	5.4458e+0 03	2.0550e+0 03

باستخدام لغة Matlab تم الحصول على الاشكال التالية التي تمثل حساب مركبات متجهات الموضع x, y, z ومركبات متجهات السرعة $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ على التوالي عند أي زمن t لقمر اصطناعي يدور حول الأرض في مدار دائري وذلك من احداثياته الكروية r, α, δ ومعدلات التغير $\dot{\alpha}, \dot{\delta}$.

حساب مركبات متجه الموضع y ومركبات متجه السرعة $\dot{y}$ عند أي زمن t

حساب مركبات متجه الموضع x ومركبات متجه السرعة $\dot{x}$ عند أي زمن t

حساب مركبات متجه الموضع z ومركبات متجه السرعة $\dot{z}$ عند أي زمن t

4- دراسة استقرارية حركة الاقمار الاصطناعية:

المعادلة العامة للحركة:

لإيجاد المعادلة العامة للحركة يجب أن نتحقق بعض الشروط وهي بموجب قانون نيوتن الثاني:

$$mr_0\omega^2 = \frac{\mu m}{r_0^2}$$

$$\omega^2 r_0^3 = \mu$$

$$w = \dot{\phi} = \text{constant}$$

حيث w هي السرعة الزاوية للقمر الاصطناعي و r_0 هو نصف القطر للمدار الثابت للقمر الاصطناعي.
بما أن [3]:
طاقة الحركة

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \cos^2 \theta \dot{\psi}^2) \quad \dots(13)$$

طاقة الوضع

$$E = -\mu \frac{m}{r} \quad \dots(14)$$

باستخدام قانون لاكرانج من النوع الثاني (أو ما يسمى معادلات لاكرانج في الإحداثيات المستقلة).
معادلة عامة

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{I}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial E}{\partial q_i} \quad \dots(15)$$

حيث $(q_j = r, \theta, \psi)$

نضع أولاً المعادلة للمحور r فنلاحظ من المعادلة (13) و (14):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}$$

كذلك:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = m\dot{\theta}^2 + m\dot{\psi}^2 \cos^2 \theta$$

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{\mu m}{r^2}$$

عليه نكتب معادلة لاكرانج من النوع الثاني حسب المعطيات (بالنسبة لـ r) فتصبح المعادلة (15) بالشكل:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = - \frac{\partial E}{\partial r}$$

نعوض:

$$m\ddot{r} - m\dot{\theta}^2 - m\dot{\psi}^2 \cos^2 \theta = -\mu \frac{m}{r^2}$$

بالقسمة على m وباستخدام التغير:

$$r = r_0 + x$$

$$\dot{\psi} = w + y$$

نحصل على:

$$\ddot{x} - (r_0 + x)\dot{\theta}^2 - (r_0 + x)\cos^2 \theta \cdot (w + y)^2 = -\frac{\mu}{(r_0 + x)^2} \quad \dots(16)$$

بالطريقة نفسها نلاحظ معادلة لاكرانج بالنسبة لـ θ هي

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = - \frac{\partial E}{\partial \theta} \quad \dots(17)$$

فنجد من المعادلة (13) و (14):

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= mr^2 \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \ddot{\theta} \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= -mr^2 \cos \theta \sin \theta \dot{\psi}^2 \\ \frac{\partial E}{\partial \theta} &= 0\end{aligned}$$

نعوض في المعادلة (17) :

$$mr^2 \ddot{\theta} + mr^2 \cos \theta \sin \theta \dot{\psi}^2 = 0$$

بالقسمة على mr وبالتعويض عن :

$$r = r_0 + x$$

$$\dot{\psi} = w + y$$

نجد :

$$(r_0 + x) \ddot{\theta} + 2r \dot{\theta} + (r_0 + x) \cos \theta \sin \theta \cdot (w + y)^2 = 0 \quad \dots(18)$$

بالطريقة نفسها نلاحظ معادلة لاكرانج بالنسبة لـ ψ هي :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} = - \frac{\partial E}{\partial \psi} \quad \dots(19)$$

فنجد من المعادلة (13) و (14) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} &= mr^2 \cos^2 \theta \cdot \dot{\psi} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} &= mr^2 \cos^2 \theta \cdot \ddot{\psi}\end{aligned}$$

نعوض في المعادلة (19) فنحصل على :

$$\frac{d}{dt} [(r_0 + x)^2 \cos^2 \theta \cdot (w + y)] = 0 \quad \dots(20)$$

وعليه من المعادلات (16), (18), (20) نحصل على المنظومة التفاضلية الثلاثية التي تمثل معادلات حركة الأقمار الاصطناعية :

$$\left. \begin{aligned}\ddot{x} - (r_0 + x) \dot{\theta}^2 - (r_0 + x) \cos^2 \theta \cdot (w + y)^2 &= - \frac{\mu}{(r_0 + x)^2} \\ (r_0 + x) \ddot{\theta} + 2r \dot{\theta} + (r_0 + x) \cos \theta \sin \theta \cdot (w + y)^2 &= 0 \\ \frac{d}{dt} [(r_0 + x)^2 \cos^2 \theta \cdot (w + y)] &= 0\end{aligned} \right\}$$

للتبسيط نستخدم التغيرات :

$$x = x_1, \dot{x} = x_2, \theta = x_3, \dot{\theta} = x_4, y = x_5$$

فنحصل على المنظومة التفاضلية الخماسية الآتية :

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (r_0 + x_1) \left[x_4^2 + \cos^2 x_3 (w + x_5)^2 \right] - \frac{\mu}{(r_0 + x_1)^2}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_4$$

$$\frac{dx_4}{dt} = -2 \frac{x_2 x_4}{r_0 + x_1} - \frac{1}{2} (w + x_5)^2 \sin 2x_3$$

$$\frac{dx_5}{dt} = -2 \frac{x_2}{r_0 + x_1} (w + x_5) + 2x_4 (w + x_5) \tan x_3$$

بأخذ التقريب الخطي [linearization] نحصل على المنظومة التفاضلية التالية:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3w^2 x_1 + 2r_0 w x_5$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_4$$

$$\frac{dx_4}{dt} = -2w^2 x_3$$

$$\frac{dx_5}{dt} = -2 \frac{w}{r_0} x_2$$

لإيجاد شروط استقرار الحركة للقمر الاصطناعي نستخدم طريقة جيتايف وكما يلي:

بما أنه يؤثر على القمر الاصطناعي قوى الجاذبية الأرضية والإحداثي ψ فإنه يوجد اثنان من تكاملات الحركة [3]:

$$T + E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \cos^2 \theta \dot{\psi}^2) - \mu \frac{m}{r} = \frac{m}{2} h$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = m r^2 \cos^2 \theta \dot{\psi} = m k$$

حيث k, h ثوابت.

سوف نبحث استقرارية الحركة الثابتة (المستقرة) لحركة القمر الاصطناعي حول المدار الدائري بالنسبة لـ

$$r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}, \psi$$

ولهذا سوف نقوم ببناء دالة ليانوف بمساعدة التكاملات:

نستخدم التغيرات:

$$r = r_0 + x_1, \dot{r} = x_2, \theta = x_3, \dot{\theta} = x_4, \dot{\psi} = w + x_5$$

نلاحظ هنا أن المنظومة تسمح ببناء تكاملات بالشكل:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= x_2^2 + (r_0 + x_1)^2 x_4^2 + (r_0 + x_1)^2 \cos^2 x_3 \cdot (w + x_5)^2 - 2 \frac{\mu}{r_0 + x_1} = h \\ F_2 &= (r_0 + x_1)^2 \cos^2 x_3 (w + x_5) = k \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

من الواضح أن التكاملين غير محددين الإشارة للقيم x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 وبهذا سوف نبني دالة ليبانوف بالشكل :

$$V = F_1 - F_1(0) + \lambda[F_2 - F_2(0)] + \beta[F_2^2 - F_2^2(0)]$$

حيث β, λ ثوابت.

نعوض قيم F_2, F_1 في هذه المعادلة فنحصل على:

$$\left. \begin{aligned} V &= x_2^2 + (r_0 + x_1)^2 x_4^2 + (r_0 + x_1)^2 \cos^2 x_3 \cdot (w + x_5)^2 - 2 \frac{\mu}{r_0 + x_1} - r_0^2 w^2 + 2 \frac{\mu}{r_0} + \\ &+ \lambda[(r_0 + x_1)^2 \cos^2 x_3 \cdot (w + x_5) - r_0^2 w] + \beta[(r_0 + x_1)^4 \cos^4 x_3 \cdot (w + x_5)^2 - r_0^4 w^2] \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

نأخذ مفكوك القيم التي فيها $\cos$ فنجد:

$$\cos^2 x_3 = (1 - \frac{x_3^2}{2} + \dots)^2 = 1 - x_3^2 + \dots$$

$$\cos^4 x_3 = (1 - \frac{x_3^2}{2} + \dots)^4 = 1 - 2x_3^2 + \dots$$

كذلك:

$$\frac{\mu}{r_0 + x_1} = \frac{\mu}{r_0} - \mu \frac{x_1}{r_0^2} + \mu \frac{x_1^2}{r_0^3} + \dots$$

نعوض في المعادلة (22) ونستخدم الشرط $w^2 r_0^3 = \mu$ فنحصل على:

$$\begin{aligned} V &= w(-w + \lambda + 6\beta r_0^2 w)x_1^2 + x_2^2 - r_0^2 w(w + \lambda + 2\beta r_0^2 w)x_3^2 + r_0^2 x_4^2 + r_0^2 (1 + \beta r_0^2)x_5^2 + \\ &+ 2r_0 w(2w + \lambda + 2\beta r_0^2 w)x_1 + r_0^2 (2w + \lambda + 2\beta r_0^2 w)x_5 + 2r_0 (2w + \lambda + 4\beta r_0^2 w)x_1 x_5 + \dots \end{aligned}$$

لهذا ولكي تكون الدالة V محددة موجبة يجب أن نساوي المعاملات من الدرجة الأولى التي تحوي على x_5, x_1 بالصفر.

بهذه الصورة الأعداد β, λ يجب أن تحقق المعادلة:

$$2w + \lambda + 2\beta r_0^2 w = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -2w - 2\beta r_0^2 w$$

نعوض هذه القيمة بالدالة V فنجد :

$$V = w^2 (4\beta r_0^2 - 3)x_1^2 + x_2^2 + r_0^2 w^2 x_3^2 + r_0^2 x_4^2 + r_0^2 (1 + \beta r_0^2)x_5^2 + 4\beta r_0^3 w x_1 x_5 + \dots$$

من الممكن أن نجزي هذه الصيغة إلى جزئين:

$$V_1 = x_2^2 + r_0^2 w^2 x_3^2 + r_0^2 x_4^2$$

$$V_2 = w^2 (4\beta r_0^2 - 3)x_1^2 + 4\beta r_0^3 w x_1 x_5 + r_0^2 (1 + \beta r_0^2)x_5^2$$

نلاحظ الدالة V_1 محددة موجبة بالنسبة لـ x_4, x_3, x_2 ولهذا لكي نعرف أن تكون الدالة V محددة موجبة بالنسبة لـ x_5, x_4, x_3, x_2, x_1 فإنه يكفي أن نبين أنه من الممكن إيجاد عدد β والذي فيه V_2 ستكون محددة موجبة بالنسبة لـ x_5, x_1 . وسوف نستخدم لهذا الغرض مقياس سلفستر للدالة V_2 . مصفوفة المعاملات لـ V_2 هي:

$$\begin{bmatrix} w^2(4\beta r_0^2 - 3) & 2\beta r_0^3 w \\ 2\beta r_0^3 w & r_0^2(1 + \beta r_0^2) \end{bmatrix}$$

وعليه:

$$\Delta_1 = w^2(4\beta r_0^2 - 3) > 0 \quad \dots(1)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} w^2(4\beta r_0^2 - 3) & 2\beta r_0^3 w \\ 2\beta r_0^3 w & r_0^2(1 + \beta r_0^2) \end{vmatrix} = w^2 r_0^2 (\beta r_0^2 - 3) > 0 \quad \dots(2)$$

من هذه العبارة يتضح أنه عندما $\beta > \frac{3}{r_0^2}$ فإن الشرطين (1), (2) سوف يتحققان وعليه الدالة V_2

ستكون محددة موجبة بالنسبة لـ x_5, x_1 وبالتالي الدالة V ستكون محددة موجبة بالنسبة لـ x_5, x_4, x_3, x_2, x_1 . وبالتالي إذا تحققت هذه الشروط نكون قد وجدنا شروط استقرارية الحركة للقمر الاصطناعي بالنسبة لـ $r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}$.

5- الاستنتاجات :

تتخذ الأقمار الاصطناعية أنواعاً مختلفة من المدارات أثناء حركتها وهذه المدارات تشكل منحنيات مغلقة وأن الرابط الذي يربط بين هذه الحركة هو قوانين كبلر ونيوتن وأنه لا يمكن دراسة استقرارية حركة الأقمار الاصطناعية باستخدام الطرائق البسيطة مثل التقريب الخطي بل يتطلب الأمر استخدام طرائق أعقد من ذلك مثل طريقة جيتايف.

المصادر

- [1] ميخائيل عبد الاحد، 1977، الموسوعة الفلكية المبسطة ، مؤسسة دار الكتب للطباعة والنشر، جامعة الموصل.
- [2] موراى ر. شبيجل، 1977، الميكانيكا العامة وتطبيقاتها ، سلسلة ملخصات شوم، مؤسسة دار ماكجروهيل للنشر.
- [3] فريدريك ج. بوش و دافيد ا. جيرد، 1995، اساسيات الفيزياء ، ترجمة سعيد الخزاعي ومحمد أمين سليمان واحمد فؤاد باشا، ط 1 ، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م، مصر .
- [4] Alexei Deriglazov , 2010 , Classical Mechanics, University Federal de Juiz de Fora , Brazil .
- [5] Bardin ,B.S.,2004,"On orbital stability of planar motions of symmetric satellites in cases of first and second order resonances ", Monografias de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza.25:59-70 ,Moscow, Russian.
- [6] Dieter Strauch , 2009 , Classical Mechanics , Universitat Regensburg.
- [7] Gregory ,R. D. , 2006 ,Classical Mechanics , Cambridge University Press.
- [8] John Wiley and Sons,2003,Spacecraft system engineering , peter Fortescue , England.
- [9] Mohammad Shahzad ,2007, Sync Hronization & Anti-Sync Hronization of Aplanar Oscillation of Satellite in an Elliptic orbit via Active control, Muscat ,Oman.
- [10] Ploen, S.R. , Scharf , D.P. , Hadaegh , F.Y. & Acikmese,A.B.,2003,Dynamics of Earth Orbiting Formations,Pasadena,U.S.A.
- [11] Szebehely , V. G. , 1989 , Adventures in celestial mechanics-A first course in the theory of orbits. University of Texas Press , Austin.
- [12] Michael Finn, J., ph. D., 2002, Classical Mechanics, Hingham, Massachusetts, New Delhi.